RÉDUCTION DES ÉCARTS DE RENDEMENT

9e année

Module 5 : Puissances et racines carrées

Guide pédagogique

Module 5

Puissances et racines carrées

Contenus d'apprentissage 3

Évaluation diagnostique 4

Matériel d'appui 7

- Carrés parfaits et racines carrées 8
- Puissances 15
- Théorème de Pythagore 21

CONTENUS D'APPRENTISSAGE

Exemples de contenus d'apprentissage qui font appel aux puissances et aux racines carrées

MPM1D

Numération et algèbre

- simplifier, à l'aide ou non d'outils technologiques, des expressions numériques.
- distinguer la valeur exacte et la valeur approximative d'une mesure et les utiliser de façon appropriée en situation.
- examiner la vraisemblance des résultats obtenus en tenant compte du contexte et en ayant recours au calcul mental et à l'estimation.
- évaluer, à l'aide de la calculatrice et sans celle-ci, des puissances et des expressions ayant pour exposant un entier positif.

Mesure et géométrie

- déterminer la valeur exacte et une valeur approximative de la mesure manquante d'un des côtés d'un triangle rectangle.
- déterminer, à l'aide du théorème de Pythagore, si un triangle est acutangle, rectangle ou obtusangle.
- déterminer les mesures manquantes dans une figure plane composée d'au moins deux triangles rectangles.
- résoudre, à l'aide du théorème de Pythagore, des problèmes relatifs au périmètre ainsi qu'à l'aire et au volume de solides simples et composés.
- déterminer la dimension manquante d'une figure plane d'une aire ou d'un périmètre donnés, y compris les situations faisant appel aux valeurs exactes.

MFM1P

Numération et algèbre

- simplifier, à l'aide ou non d'outils technologiques, des expressions numériques.
- examiner la vraisemblance des résultats obtenus en tenant compte du contexte et en ayant recours au calcul mental et à l'estimation.

Mesure et géométrie

- déterminer, à l'aide ou non d'outils technologiques, la mesure manquante d'un des côtés d'un triangle rectangle.
- déterminer, à l'aide ou non d'outils technologiques, si un triangle est rectangle ou non.
- déterminer les mesures manquantes dans une figure plane composée d'au moins deux triangles rectangles.
- résoudre, à l'aide du théorème de Pythagore, des problèmes portant sur le périmètre et l'aire de figures simples et composées et le volume de solides simples.

ÉVALUATION DIAGNOSTIQUE

Remettre aux élèves une copie de l'évaluation diagnostique (voir Guide de l'élève) et leur accorder suffisamment de temps pour répondre aux questions. Si des élèves ont de la difficulté à comprendre le sens d'une question, n'hésitez pas à leur expliquer.

Matériel
- calculatrices

Corriger les évaluations et planifier les interventions pédagogiques en fonction de l'analyse des résultats obtenus.

Ce guide contient du matériel d'appui relatif :
- aux carrés parfaits et aux racines carrées;
- aux puissances;
- au théorème de Pythagore.

Il n'est pas nécessaire d'utiliser tout ce matériel. Le tableau suivant propose une façon de choisir le matériel d'appui en fonction des difficultés observées lors de l'analyse des résultats.

Résultats	Matériel d'appui suggéré
Les élèves éprouvent des difficultés avec les questions 1 à 4.	Utiliser la section « Carrés parfaits et racines carrées ».
Les élèves éprouvent des difficultés avec les questions 5 à 8.	Utiliser la section « Puissances ».
Les élèves éprouvent des difficultés avec les questions 9 à 12.	Utiliser la section « Théorème de Pythagore »

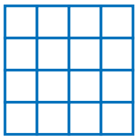
Note : Des élèves peuvent éprouver des difficultés à utiliser des racines carrées, des puissances et le théorème de Pythagore, notamment parce qu'elles et ils :
- ne distinguent pas un carré parfait d'une racine carrée;
- ne reconnaissent pas les rôles respectifs de la base et de l'exposant dans une puissance;
- ne comprennent pas le concept de racine carrée lorsque la racine n'est pas un nombre naturel;
- sont incapables d'estimer la racine carrée d'un nombre lorsque cette racine n'est pas un nombre naturel;
- ne saisissent pas la relation entre $\sqrt{n}$ et $\sqrt{n00}$;
- perçoivent mal l'ordre de grandeur des carrés et des racines carrées de fractions propres;
- utilisent le théorème de Pythagore dans des situations impliquant des triangles non rectangles;
- sont incapables d'utiliser le théorème de Pythagore pour déterminer la longueur d'un des deux côtés les plus courts d'un triangle rectangle (mais peuvent déterminer la longueur de l'hypoténuse).

Solutions

1. p. ex., 1 296, 1 600 et 1 764
(**Note :** Les élèves pourraient aussi écrire 36 × 36, 40 × 40 et 42 × 42.)

2. **a)** p. ex., 15,7 **b)** p. ex., 9,5 **c)** p. ex., 24,9

3. Exemple



4. p. ex.,

$$\begin{aligned}\sqrt{250\ 000} &= \sqrt{10\ 000 \times 25}\\ &= \sqrt{10\ 000} \times \sqrt{25}\\ &= 100 \times \sqrt{25}\end{aligned}$$

5. A : 5 × 5 × 5

6. **a)** 81 **b)** 64 **c)** 1 000
d) –32 **e)** 0,04

7. Par exemple, $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ ou $9 \times 9 \times 3$, et $5^3 = 5 \times 5 \times 5$. Étant donné que le produit de deux 9 vaut beaucoup plus que le produit de deux 5, et que 3 est juste un peu plus petit que 5, il est vraisemblable que 3^5 soit plus grand que 5^3.

8. 4^3. Par exemple, les droites foncées et les droites pointillées séparent le grand carré en 4 grands ensembles de 4 plus petits ensembles de 4 petits carrés (4 × 4 × 4).

9. Par exemple, la somme des aires des carrés sur les deux côtés les plus courts (36 + 64) est égale à l’aire du carré sur le côté le plus long (100). On a donc un triangle rectangle.

10. **a)** $\sqrt{41}$ cm (ou environ 6,4 cm) **b)** 13 cm

11. **a)** $\sqrt{91}$ cm (ou environ 9,5 cm) **b)** $\sqrt{75}$ cm (ou environ 8,7 cm)

12. $\sqrt{48}$ cm (ou environ 6,9 cm)

Évaluation diagnostique

1. Un carré parfait est un nombre qui est le carré d'un nombre naturel. Énumère 3 carrés parfaits entre 1 000 et 2 000.

2. Estime la valeur positive des racines carrées suivantes. N'UTILISE PAS de calculatrice.

a) $\sqrt{250}$ **b)** $\sqrt{88}$ **c)** $\sqrt{622}$

3. Démontre à l'aide d'un dessin que $\sqrt{16} = 4$.

4. Comment peut-on démontrer que $\sqrt{250\,000}$ vaut nécessairement 100 fois plus que $\sqrt{25}$?

5. Laquelle des expressions suivantes est équivalente à 5^3?

A : 5 × 5 × 5

B : 3 × 3 × 3 × 3 × 3

C : 5 × 3 × 5 × 3

D : 5 × 3

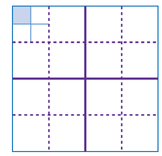
6. Évalue les puissances suivantes.

a) 3^4 **b)** 4^3 c) 10^3 **d)** $(–2)^5$ **e)** $(0,2)^2$

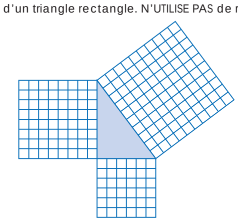
Évaluation diagnostique (*Suite*)

7. Sans déterminer de valeurs exactes, comment peut-on expliquer que 3^5 est vraisemblablement supérieur à 5^3?

8. En utilisant les 4 droites pointillées et les 2 droites plus foncées comme repères, représente par une puissance le nombre de petits carrés ombrés que l'on peut insérer dans le plus grand carré. Explique ton raisonnement.



9. Explique pourquoi les carrés tracés sur les côtés du triangle ci-dessous permettent de dire qu'il s'agit d'un triangle rectangle. N'UTILISE PAS de rapporteur.



Évaluation diagnostique (*Suite*)

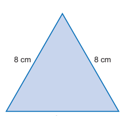
10. Les mesures suivantes correspondent à la longueur des deux côtés les plus courts d'un triangle rectangle. Sans utiliser une règle, détermine la longueur du côté le plus long.

a) 4 cm et 5 cm b) 5 cm et 12 cm

11. Le côté le plus long d'un triangle rectangle mesure 10 cm. On te donne la longueur de l'un des deux autres côtés. Sans utiliser une règle, détermine la longueur du troisième côté.

a) 3 cm b) 5 cm

12. Sans utiliser une règle, détermine la hauteur du triangle suivant.



MATÉRIEL D'APPUI

L'objectif du matériel d'appui est d'aider les élèves à développer les habiletés de base pour traiter les racines carrées et les puissances dont la base est un nombre entier ou un nombre rationnel, et pour résoudre des problèmes à l'aide du théorème de Pythagore.

Chaque section du matériel d'appui comprend deux approches : l'approche par question ouverte (tâche unique) et l'approche par fiche de réflexion (tâches multiples). Les deux portent sur les mêmes contenus d'apprentissage; elles représentent des façons différentes d'interagir avec les élèves et de les mobiliser. Vous pouvez choisir une seule approche ou alterner entre les deux, dans l'ordre de votre choix.

Des interventions vous sont proposées pour faciliter l'apprentissage avant, pendant et après l'utilisation de l'approche de votre choix. Elles sont présentées en trois parties comme suit :

- Questions à poser avant de présenter la question ouverte ou la fiche de réflexion;
- Utilisation de la question ouverte ou de la fiche de réflexion;
- Consolidation et objectivation.

Carrés parfaits et racines carrées

Question ouverte

Matériel
- papier quadrillé
- calculatrices

Questions à poser avant de présenter la question ouverte

◊ *Un carré mesure 10 cm de côté. Quelle est son aire?* (100 cm^2) *Comment le savez-vous?* (Par exemple, j'ai multiplié 10 par 10.)
◊ *Que pouvez-vous conclure au sujet de la longueur des côtés d'un carré dont l'aire est de 110 cm^2?* (Par exemple, que la longueur des côtés doit être légèrement supérieure à 10.) *Pourquoi légèrement supérieure à 10?* (Par exemple, parce que 110 n'est que légèrement supérieur à 10 × 10.)
◊ *Si l'aire d'un carré est supérieure à l'aire d'un autre carré, la longueur de chacun de ses côtés est-elle aussi supérieure à la longueur de chacun des côtés de l'autre carré?* (Oui car, par exemple, un carré dont l'aire est de 25 cm^2 est plus grand qu'un carré dont l'aire est de16 cm^2, et ses côtés de 5 cm sont plus longs que les côtés de 4 cm de l'autre carré.)

Utilisation de la question ouverte

Assurez-vous que les élèves comprennent qu'elles et ils doivent choisir 8 nombres entiers compris entre 100 et 300, et 4 nombres compris entre 0 et 1, en tenant compte des conditions données. Encouragez-les à répartir les nombres entiers dans tout l'intervalle de 100 à 300.

En observant ou en écoutant les élèves, notez si elles et ils :
- peuvent reconnaître des carrés parfaits;
- peuvent dire si certains nombres ont plusieurs facteurs ou pas;
- peuvent estimer la valeur de racines carrées;
- comprennent que la racine carrée positive d'une fraction propre est supérieure à la fraction elle-même.

Consolidation et objectivation

Exemples de questions à poser :
◊ *Comment avez-vous su, par exemple, que 121 était un carré parfait?* (Je savais que je devais multiplier deux nombres supérieurs à 10 pour obtenir une aire de plus de 100. J'ai donc essayé 11 × 11 et j'ai obtenu 121.)
◊ *Parmi vos estimations des racines carrées, laquelle était la plus proche de la valeur réelle? Pourquoi?* (Par exemple, je crois que mon estimation de la racine carrée de 120 était très proche, puisque 120 est très proche de 121.)
◊ *Si vous aviez estimé que $\sqrt{280}$ vaut environ 16,8, comment pourriez-vous déterminer à quel point vous êtes près de la valeur réelle de cette racine?* (Par exemple, je pourrais calculer 16,8 × 16,8 et comparer le résultat avec 280.)
◊ *Qu'avez-vous constaté au sujet de la racine carrée positive d'une fraction propre?* (Par exemple, que la racine carrée d'une fraction propre est supérieure à la fraction elle-même.) *Vous attendiez-vous à une telle constatation?* (Par exemple, non parce que la racine carrée positive d'un nombre naturel est toujours inférieure au nombre lui-même; je pensais que c'était aussi vrai pour les fractions propres.)

Solutions

Exemples

Nombres entiers compris entre 100 et 300 :
Carrés parfaits : 121 225 169
Double : 242
Beaucoup de facteurs : 120 160 280
Peu de facteurs : 101

$\sqrt{121} = 11$
$\sqrt{225} = 15$
$\sqrt{169} = 13$
$\sqrt{242}$ vaut environ 15,5 puisque 242 est presque à mi-chemin entre 225 (15 × 15) et 256 (16 × 16).
$\sqrt{120}$ vaut environ 10,9 puisque 120 est presque égal à 121 (11 × 11).
$\sqrt{160}$ vaut environ 12,8 puisque 160 est légèrement inférieur à 169 (13 × 13).
$\sqrt{280}$ vaut environ 16,8 puisque 280 est légèrement inférieur à 289 (17 × 17).
$\sqrt{101}$ vaut environ 10,1 puisque 101 est presque égal à 100 (10 × 10).

Nombres compris entre 0 et 1 :
Près de 0 : $\frac{4}{25}$ 0,01
Près de 1 : 0,8 $\frac{2}{3}$

$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$, puisque $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$.
$\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$, puisque $0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$.
$\sqrt{0{,}8}$ vaut environ 0,9, puisque $0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}81$, ce qui est très proche de 0,8.
$\sqrt{\frac{2}{3}}$ vaut environ $\frac{5}{6}$, puisque $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$, ce qui est proche de $\frac{24}{36}$, soit $\frac{2}{3}$.

Fiche de réflexion

Matériel
- papier quadrillé
- calculatrices

Questions à poser avant de présenter la fiche de réflexion

◊ *Un carré mesure 10 cm de côté. Quelle est son aire?* (100 cm^2) *Comment le savez-vous?* (Par exemple, j'ai multiplié 10 par 10.)
◊ *Que pouvez-vous conclure au sujet de la longueur des côtés d'un carré dont l'aire est de 110 cm^2?* (Par exemple, que la longueur des côtés doit être légèrement supérieure à 10.) *Pourquoi légèrement supérieure à 10?* (Par exemple, parce que 110 n'est que légèrement supérieur à 10 × 10.)
◊ *Si l'aire d'un carré est supérieure à l'aire d'un autre carré, la longueur de chacun de ses côtés est-elle aussi supérieure à la longueur de chacun des côtés de l'autre carré?* (Oui car, par exemple, un carré dont l'aire est de 25 cm^2 est plus grand qu'un carré dont l'aire est de16 cm^2, et ses côtés de 5 cm sont plus longs que les côtés de 4 cm de l'autre carré.)

Utilisation de la fiche de réflexion

Lisez l'encadré avec les élèves et, s'il y a lieu, répondez à leurs questions. Assurez-vous qu'elles et ils font bien la distinction entre les carrés parfaits et les racines carrées.

Demandez aux élèves de répondre aux questions qui suivent l'encadré. Mettez à leur disposition des calculatrices et du papier quadrillé afin de les aider à évaluer et à représenter les racines carrées.

En observant ou en écoutant les élèves, notez si elles et ils :
- peuvent reconnaître des carrés parfaits;
- comprennent que les nombres compris entre deux carrés parfaits n'ont pas de racines carrées entières;
- comprennent en quoi le fait de décomposer un nombre en facteurs peut aider à créer des carrés parfaits;
- peuvent estimer la valeur de racines carrées;
- peuvent établir la relation entre $\sqrt{n}$ et $\sqrt{100 \times n}$;
- comprennent que la racine carrée positive d'une fraction propre est supérieure à la fraction elle-même.

Consolidation et objectivation

Exemples de questions à poser :

◊ *Comment saviez-vous, par exemple, que 225 était un carré parfait?* (Par exemple, j'ai élevé au carré quelques nombres entiers supérieurs à 10 et j'ai constaté que 15 × 15 = 225.)

◊ *Pourquoi l'expression 2 × 2 × 5 × 3 ne correspond-elle pas à un carré parfait?* (Par exemple, la valeur de l'expression est 60, et 60 n'est pas un carré parfait.)

◊ *Pourquoi obtient-on un carré parfait en multipliant l'expression 2 × 2 × 5 × 3 par 5 × 3?* (Par exemple, car cela revient à multiplier l'expression 2 × 5 × 3 par elle-même, ce qui correspond au carré de 2 × 5 × 3.)

◊ *Pourquoi* $\sqrt{65}$ *est-elle plus près de 8 que ne l'est* $\sqrt{70}$*?* (Par exemple, parce que 65 est plus près de 64 que ne l'est 70.)

◊ *Quelle relation y a-t-il entre* $\sqrt{30}$ *et* $\sqrt{3\,000}$*?* (Par exemple, $\sqrt{30}$ vaut un dixième de $\sqrt{3\,000}$.) *Pourquoi cette relation était-elle prévisible?* (Par exemple, 3 000 = 30 × 100 et la racine carrée de 100 est 10.)

◊ *Qu'avez-vous constaté au sujet de la racine carrée positive d'une fraction propre?* (Par exemple, que la racine carrée d'une fraction propre est supérieure à la fraction elle-même.) *Vous attendiez-vous à une telle constatation?* (Par exemple, non parce que la racine carrée positive d'un nombre naturel est toujours inférieure au nombre lui-même; je pensais que c'était aussi vrai pour les fractions propres.)

◊ *Comment avez-vous fait pour déterminer que la réponse à la question 12 b) était* $\frac{1}{9}$*?* (Par exemple, je savais que je devais multiplier la racine carrée par elle-même pour obtenir le nombre. Comme la question précisait que le nombre valait $\frac{1}{3}$ de sa racine carrée, j'ai fait $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ et j'ai obtenu $\frac{1}{9}$.)

Solutions

1. **a)** 225, 256, 289
b) Par exemple, 14 × 14 vaut moins que 200 et 18 × 18 vaut plus que 300.

2. Par exemple, je sais que 250 se situe entre 225 et 256, les carrés parfaits respectifs de 15 et 16, et il n'y a pas d'entier entre 15 et 16.

3. **a)** $100 = 10^2$ $\quad$ $10\,000 = 100^2$
b) 1 000 est compris entre 961 (31 × 31) et 1 024 (32 × 32).
100 000 est compris entre 99 856 (316 × 316) et 100 489 (317 × 317).

4. **a)** p. ex., 15 : $2 \times 2 \times 5 \times 3 \times 15 = 2 \times 2 \times 5 \times 3 \times (3 \times 5)$
$= (2 \times 3 \times 5) \times (2 \times 3 \times 5)$
$= 30^2$
60 : $2 \times 2 \times 5 \times 3 \times 60 = 2 \times 2 \times 5 \times 3 \times (2 \times 2 \times 3 \times 5)$
$= (2 \times 2 \times 5 \times 3) \times (2 \times 2 \times 5 \times 3)$
$= 60^2$
240 : $2 \times 2 \times 5 \times 3 \times 240 = 2 \times 2 \times 5 \times 3 \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5)$
$= (2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5) \times (2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5)$
$= 120^2$
b) Qu'il y a un nombre pair de chaque facteur premier.
c) 5; il y a deux paires de 2 (puisque 4 = 2 × 2), donc il me manque seulement un 5 pour avoir une paire de 5 et avoir ainsi un nombre pair de chaque facteur premier.

5. **a)** 8 m, puisque 8 × 8 = 64. **b)** 12 m, puisque 12 × 12 = 144.
c) environ 14,14 m, puisque (14,14) × (14,14) donne environ 200.

6. Par exemple, le nombre peut être 50 puisque 50 est beaucoup plus près de 49 (7 × 7) que de 64 (8 × 8).

7. **a)** Par exemple, environ 5,5 puisque 30 est presque à mi-chemin entre 25 et 36.
b) Par exemple, environ 17,3 puisque 300 est un peu plus près de 289 (17 × 17) que de 324 (18 × 18).
c) Par exemple, environ 55 puisque $55^2 = 3\,025$.

8. **a)** Par exemple, $\sqrt{3\,000}$ vaut dix fois plus que $\sqrt{30}$.
b) Par exemple, 3 000 = 30 × 100 et $\sqrt{100} = 10$.

9. Par exemple, je sais que 8 × 8 = 64, que 6 × 6 = 36 et que 5 × 5 = 25. Donc, $\sqrt{57\,600} = 8 \times 6 \times 5$.

10. **a)** 2 chiffres. Par exemple, les carrés parfaits à 3 chiffres vont de 100 à 961. Puisque $\sqrt{100} = 10$ et que $\sqrt{961} = 31$, alors la racine carrée d'un carré parfait à 3 chiffres comprend nécessairement 2 chiffres.
b) 2 chiffres. Par exemple, les carrés parfaits à 4 chiffres sont compris entre 1 000 et 9 999. Puisque $\sqrt{1\,000}$ vaut un peu plus de 31 et que $\sqrt{9\,999}$ vaut juste un peu moins que 100, alors la racine carrée d'un carré parfait à 4 chiffres comprend nécessairement 2 chiffres.

11. Par exemple, lorsque l'on multiplie deux fractions inférieures à 1, le produit est inférieur aux deux fractions qui sont multipliées. Ainsi, si l'on multiplie une fraction inférieure à 1 par elle-même, son carré sera inférieur à cette fraction.

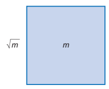
12. **a)** 25 **b)** $\frac{1}{9}$ **c)** 100 **d)** $\frac{1}{25}$

Question ouverte

Carrés parfaits et racines carrées

Question ouverte

Si l'aire d'un carré est égale à m unités carrées, la longueur de chacun de ses côtés correspond à la racine carrée de m. Cela s'écrit $\sqrt{m}$. Si $\sqrt{m}$ correspond à un nombre naturel, alors m est un carré parfait.



- Choisis comme valeurs possibles de l'aire d'un carré, huit nombres entiers compris entre 100 et 300, en tenant compte des conditions suivantes :
  - trois des nombres sont des carrés parfaits, et les cinq autres n'en sont pas;
  - l'un des nombres est le double de l'un des autres nombres;
  - au moins un des nombres a plusieurs facteurs, et au moins un des nombres en a peu.

- Choisis comme valeurs possibles de l'aire d'un carré, quatre nombres compris entre 0 et 1, en tenant compte des conditions suivantes :
  - deux des nombres sont proches de 0;
  - les deux autres nombres sont proches de 1.

- Détermine la racine carrée des trois nombres entiers qui sont des carrés parfaits et estime la racine carrée des autres nombres. Justi e tes estimations.

Fiche de réflexion

Carrés parfaits et racines carrées *(Suite)*

Fiche de réflexion

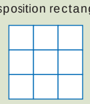
Un carré parfait est le produit de deux nombres naturels identiques.

Par exemple, 16 est un carré parfait puisque 4 × 4 = 16. On dit que 4 au carré est égal à 16.

Quelques exemples de carrés parfaits :

1 1 × 1
3
4 2 × 2
5
9 3 × 3
7
16 4 × 4
9
25 5 × 5
…

Il est possible de modéliser les carrés parfaits à l'aide de dispositions rectangulaires. Par exemple, 3 × 3 peut être représenté par la disposition rectangulaire suivante :

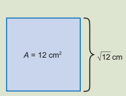


On constate que l'écart entre deux carrés parfaits successifs est croissant. Par exemple, il y a un écart de 3 entre 1 et 4, un écart de 5 entre 4 et 9, et un écart de 7 entre 9 et 16.

La racine carrée d'un nombre positif quelconque correspond au nombre qui, multiplié par lui-même, donne le nombre positif initial. Chaque nombre positif a deux racines carrées, une qui est positive et l'autre, son opposé, qui est négative. Par exemple, les racines carrées de 16 sont 4 et –4 puisque 4 × 4 = 16 et que (–4) × (–4) = 16. En mathématiques, le signe $\sqrt{}$ est utilisé pour désigner une racine carrée. Par exemple, la racine carrée de 16 s'écrit $\sqrt{16}$.

La racine carrée d'un nombre ne donne pas nécessairement un nombre entier. Par exemple, la valeur positive de $\sqrt{8}$ se situe entre 2 et 3, puisque 2 × 2 = 4, que 3 × 3 = 9 et que 8 se situe entre 4 et 9. Sa valeur négative, opposée à la valeur positive, se situe donc entre –2 et –3.

Si un nombre A quelconque correspond à l'aire d'un carré, on peut associer la racine carrée de ce nombre ($\sqrt{A}$) à la longueur de chacun des côtés du carré. Par exemple, on peut associer $\sqrt{12}$ à la longueur de chacun des côtés d'un carré dont l'aire est de 12 cm². La valeur exacte de la longueur des côtés est de $\sqrt{12}$ cm alors que la valeur approximative est de 3,5 cm.



Carrés parfaits et racines carrées *(Suite)*

Note : Dans un contexte géométrique où la racine carrée d'un nombre correspond, par exemple, à la longueur des côtés d'un carré, on ne retient que la racine carrée positive, puisque la longueur des côtés ne peut pas correspondre à une valeur négative.

- Pour estimer la racine carrée positive d'un nombre, on peut commencer par comparer ce nombre à des carrés parfaits que l'on connaît.

  Par exemple, en reconnaissant que 125 se situe entre 121 (11 × 11) et 144 (12 × 12), on peut dire que $\sqrt{125}$ se situe entre 11 et 12. On peut ensuite estimer que $\sqrt{125}$ est environ égale à 11,2 puisque 125 est plus près de 121 que de 144. En utilisant la touche $\sqrt{}$ d'une calculatrice, on peut déterminer la valeur de $\sqrt{125}$ avec plus d'exactitude (p. ex., $\sqrt{125}$ = 11,1803).

  Il est utile de connaître quelques carrés parfaits, comme ceux indiqués dans le tableau ci-contre.

- On peut s'appuyer sur le fait que 10 × 10 = 100 et que 100 × 100 = 10 000 pour estimer les racines carrées positives de nombres plus grands.
  Par exemple,
  puisque $\sqrt{15}$ est proche de 4,
  alors $\sqrt{1\,500}$ est proche de 40
  et $\sqrt{150\,000}$ est proche de 400.

Carré parfait	Racine carrée
1	1
4	2
9	3
16	4
25	5
36	6
49	7
64	8
81	9
100	10
121	11
144	12
10 000	100
1 000 000	1 000

1. a) Énumère tous les carrés parfaits compris entre 200 et 300.

   b) Comment sais-tu que tu les as tous énumérés?

2. Comment peux-tu reconnaître que 250 ne peut pas être un carré parfait?

Carrés parfaits et racines carrées (*Suite*)

3\. a) Parmi ces puissances de 10, lesquelles sont des carrés parfaits? Justifie ta réponse.

100 1 000 10 000 100 000

b) Pourquoi ne sont-elles pas toutes des carrés parfaits?

4\. a) Tu veux multiplier l'expression numérique 2 × 2 × 5 × 3 par un nombre pour que le résultat soit un carré parfait. Énumère trois nombres possibles et démontre que tu obtiens dans chaque cas un carré parfait.

b) Que constates-tu lorsque ces carrés parfaits sont exprimés comme le produit de leurs facteurs premiers?

c) Quel est le plus petit nombre par lequel tu pourrais multiplier l'expression 2 × 2 × 4 × 5 pour que le résultat soit un carré parfait? Justifie ta réponse.

5\. Quelle est la longueur des côtés des trois jardins carrés dont l'aire est donnée ci-dessous? Comment le sais-tu?

a) 64 m^2 b) 144 m^2 c) 200 m^2

6\. Tu sais que la racine carrée positive d'un nombre est plus près de 7 que de 8. Quel peut être ce nombre? Comment le sais-tu?

7\. Estime la valeur positive des racines carrées suivantes sans utiliser la calculatrice. Explique ton raisonnement.

a) $\sqrt{30}$ b) $\sqrt{300}$ c) $\sqrt{3\,000}$

Carrés parfaits et racines carrées (*Suite*)

8\. a) Quelle relation y a-t-il entre les réponses aux questions 7 a) et 7 c)?

b) Pourquoi cette relation était-elle prévisible?

9\. Comment le fait de décomposer 57 600 en 64 × 36 × 25 peut-il t'aider à déterminer la racine carrée positive de ce nombre?

10\. Combien de chiffres la racine carrée positive de chacun des nombres suivants peut-elle comprendre? Explique ton raisonnement.

a) un carré parfait à 3 chiffres b) un carré parfait à 4 chiffres

11\. Comment peut-on expliquer que la valeur positive de $\sqrt{\frac{1}{4}}$ soit supérieure à $\frac{1}{4}$?

12\. Une relation entre un nombre et sa racine carrée est décrite dans chacun des problèmes ci-dessous. Détermine dans chaque cas quel est ce nombre.

a) Le nombre vaut 5 fois sa racine carrée.

b) Le nombre vaut $\frac{1}{3}$ de sa racine carrée.

c) Le nombre vaut 90 de plus que sa racine carrée.

d) Le nombre vaut $\frac{4}{25}$ de moins que sa racine carrée.

Puissances

Question ouverte

Matériel
- calculatrices

Questions à poser avant de présenter la question ouverte
◊ *Quelle expression donne le plus grand produit : (3 × 3 × 3) ou (4 × 4 × 4)?* (La deuxième puisque, par exemple, les nombres qui forment le produit sont plus grands.) ◊ *Quelle expression donne le plus grand produit : (3 × 3 × 3) ou (3 × 3 × 3 × 3)?* (La deuxième puisque, par exemple, on multiplie par un 3 de plus.) ◊ *Dans quelle situation pensez-vous que l'on obtient le plus grand produit : en multipliant 3 par lui-même 10 fois, ou en multipliant 10 par lui-même 3 fois?* (Par exemple, je pense qu'en multipliant plusieurs 3, on obtient un nombre plus grand qu'en ne multipliant que quelques 10. Il suffit de constater que 3 × 3 × 3 × 3 = 81, et que si l'on multiplie ce résultat par 3 × 3, on obtient déjà plus de 700. En poursuivant la multiplication avec les autres 3, on obtiendra donc un nombre supérieur à 10^3, puisque 10^3 = 1 000.)
Utilisation de la question ouverte
Encouragez les élèves à effectuer le plus de constatations possible au sujet des puissances. En observant ou en écoutant les élèves, notez si elles et ils : • peuvent évaluer des puissances simples; • comprennent qu'un nombre à l'exposant 1 est égal à lui-même; • comprennent qu'augmenter l'exposant d'une puissance de 1 revient à multiplier une fois de plus par la base; • comprennent que plus une puissance a une base qui est grande, plus sa valeur augmente rapidement; • peuvent établir une équivalence entre certaines puissances de 2 et de 4; • comprennent que les valeurs des puissances de nombres compris entre 0 et 1 diminuent au fur et à mesure que l'exposant augmente; • comprennent que les puissances de nombres négatifs peuvent avoir une valeur positive ou négative.

Consolidation et objectivation

Exemples de questions à poser :

◊ *En quoi semble-t-il logique que $6^1 = 6$?* (Par exemple, car cela signifie qu'il n'y aurait qu'un seul 6 dans le produit; il n'y a donc pas de multiplication à faire.)

◊ *Une fois que vous avez évalué 3^4, comment avez-vous procédé pour évaluer 3^5?* (Par exemple, j'ai multiplié la valeur de 3^4 par 3.)

◊ *Pourquoi est-il logique que les valeurs de toutes les puissances de 2 soient paires?* (Par exemple, parce que l'on ne fait que multiplier des nombres pairs par des nombres pairs, ce qui donne toujours des produits pairs.)

◊ *Pourquoi est-il logique que les puissances de 4 soient aussi des puissances de 2?* (Par exemple, parce que $4 = 2 \times 2$, donc le produit de plusieurs 4 est équivalent au produit de deux fois plus de 2.)

◊ *Parmi les puissances obtenues, laquelle a la valeur la plus élevée? Cela vous a-t-il surpris?* (5^5, par exemple, cela ne m'a pas surpris, puisque c'est la puissance qui a la base la plus grande et l'exposant le plus grand.)

◊ *Qu'avez-vous constaté au sujet des puissances de 0,5?* (Par exemple, que leurs valeurs sont composées presque des mêmes chiffres que les valeurs des puissances de 5, tout en étant beaucoup moins élevées. De plus, leurs valeurs vont en diminuant au lieu d'aller en augmentant.)

◊ *Qu'avez-vous constaté au sujet des puissances de –2?* (Par exemple, que leurs valeurs ressemblent aux valeurs des puissances de 2, sauf qu'elles alternent entre une valeur positive et une valeur négative.)

Solutions

$1^1 = 1$	$1^2 = 1$	$1^3 = 1$	$1^4 = 1$	$1^5 = 1$
$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$
$3^1 = 3$	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$	$3^5 = 243$
$4^1 = 4$	$4^2 = 16$	$4^3 = 64$	$4^4 = 256$	$4^5 = 1\,024$
$5^1 = 5$	$5^2 = 25$	$5^3 = 125$	$5^4 = 625$	$5^5 = 3\,125$
$0{,}5^1 = 0{,}5$	$0{,}5^2 = 0{,}25$	$0{,}5^3 = 0{,}125$	$0{,}5^4 = 0{,}0625$	$0{,}5^5 = 0{,}03125$
$(-2)^1 = -2$	$(-2)^2 = 4$	$(-2)^3 = -8$	$(-2)^4 = 16$	$(-2)^5 = -32$

Exemples de constatations possibles :

- la valeur de toute puissance ayant une base de 1 est égale à 1;
- tout nombre à l'exposant 1 est égal à lui-même;
- plus une puissance a une base qui est grande, plus sa valeur augmente rapidement;
- les valeurs des puissances de 2 et de 4 sont toutes paires alors que les valeurs des puissances de 1, de 3 et de 5 sont toutes impaires;
- les puissances de 4 sont aussi des puissances de 2;
- à l'exception de certains zéros, les valeurs des puissances de 0,5 sont composées des mêmes chiffres que les valeurs des puissances de 5;
- les valeurs des puissances de 0,5 vont en diminuant au lieu d'aller en augmentant;
- les valeurs des puissances de –2 sont semblables aux valeurs des puissances de 2, mais elles alternent entre une valeur positive et une valeur négative.

Fiche de réflexion

Matériel
- calculatrices

Questions à poser avant de présenter la fiche de réflexion

◊ *Quelle expression donne le plus grand produit : (3 × 3 × 3) ou (4 × 4 × 4)?* (La deuxième puisque, par exemple, les nombres qui forment le produit sont plus grands.)

◊ *Quelle expression donne le plus grand produit : (3 × 3 × 3) ou (3 × 3 × 3 × 3)?* (La deuxième puisque, par exemple, on multiplie par un 3 de plus.)

◊ *Dans quelle situation pensez-vous que l'on obtient le plus grand produit : en multipliant 3 par lui-même 10 fois, ou en multipliant 10 par lui-même 3 fois?* (Par exemple, je pense qu'en multipliant plusieurs 3, on obtient un nombre plus grand qu'en ne multipliant que quelques 10. Il suffit de constater que 3 × 3 × 3 × 3 = 81, et que si l'on multiplie ce résultat par 3 × 3, on obtient déjà plus de 700. En poursuivant la multiplication avec les autres 3, on obtiendra donc un nombre supérieur à 10^3, puisque 10^3 = 1 000.)

Utilisation de la fiche de réflexion

Lisez l'encadré avec les élèves et répondez, s'il y a lieu, à leurs questions.

Demandez-leur de répondre aux questions qui suivent l'encadré.

En observant ou en écoutant les élèves, notez si elles et ils :
- peuvent évaluer des puissances;
- peuvent associer les puissances au carré et au cube à un modèle géométrique;
- peuvent associer les puissances à des contextes appropriés;
- peuvent comparer des puissances ayant deux bases différentes;
- peuvent comparer des puissances différentes ayant la même base;
- comprennent que les valeurs des puissances de nombres compris entre 0 et 1 diminuent au fur et à mesure que l'exposant augmente;
- comprennent que les puissances de nombres négatifs peuvent avoir une valeur positive ou négative;
- peuvent représenter un produit de facteurs sous forme d'une puissance.

Consolidation et objectivation

Exemples de questions à poser :

◊ *Une fois que vous avez évalué 3^4, comment pourriez-vous procéder pour évaluer 3^5?* (Par exemple, je pourrais multiplier la valeur de 3^4 par 3.)

◊ *En quoi vos dessins à la question 2 sont-ils différents? Comment l'expliquez-vous?* (Par exemple, les carrés représentent des aires et les cubes, des volumes.)

◊ *Qu'avez-vous constaté au sujet des puissances de $\frac{1}{2}$?* (Par exemple, au fur et à mesure que l'exposant augmente, la valeur des puissances diminue au lieu d'augmenter.)

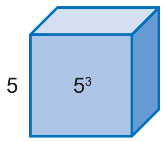
◊ *Pourquoi est-il logique que les puissances de 9 soient aussi des puissances de 3?* (Par exemple, parce que 9 = 3 × 3, donc le produit de plusieurs 9 est équivalent au produit de deux fois plus de 3.)

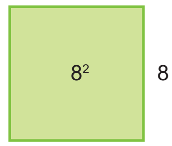
◊ *Si vous dressiez une liste de toutes les puissances de –3, que constateriez-vous?* (Par exemple, leurs valeurs ressemblent aux valeurs des puissances de 3, sauf qu'elles alternent entre une valeur positive et une valeur négative.)

◊ *Comment saviez-vous que 10^3 était inférieur à 100^2?* (Par exemple, 100^2 est équivalent à 10^4; il est donc supérieur à 10^3.)

Solutions

1. **a)** $3 \times 3 \times 3 \times 3$
   b) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
   c) $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$
   d) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
   e) $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

2. **a)**


   b)


3. 4^3; par exemple, si la grande boîte peut contenir 4 boîtes de taille moyenne qui peuvent contenir chacune 4 petites boîtes, alors la grande boîte peut contenir 4×4 (ou 4^2) petites boîtes. Puisque chaque petite boîte peut contenir 4 très petites boîtes, on peut alors conclure que la grande boîte peut contenir 4×4^2, soit 4^3, très petites boîtes.

4. Par exemple, une très grande boîte peut contenir 6 grandes boîtes.
   Chaque grande boîte peut contenir 6 boîtes de taille moyenne.
   Chaque boîte de taille moyenne peut contenir 6 petites boîtes.
   Chaque petite boîte peut contenir 6 très petites boîtes.

5. p. ex., 2 (ou tout nombre pair)

6. **a)** $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2$
   b) 2^2 2^3 2^4 2^5
   c) Par exemple, au fur et à mesure que les exposants augmentent, les valeurs des puissances de 2 augmentent, alors que les valeurs des puissances de $\frac{1}{2}$ diminuent.

7. 4^5

8. **a)** 3 **b)** 4 **c)** 5

9. **a)** 2^5, puisque l'on multiplie par plus de 2.
   b) 10^3, puisque l'on multiplie 3 nombres plus grands.
   c) 100^2, puisque 100^2 est équivalent à 10^4, et 10^4 est supérieur à 10^3.

10. **a)** p. ex., $\frac{1}{2}$ **b)** p. ex., 10 **c)** p. ex., $\frac{1}{10}$

11. $$\begin{aligned} 20^5 &= 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 \\ &= (20 \times 20) \times (20 \times 20 \times 20) \\ &= 400 \times 20^3 \end{aligned}$$

12. **a)** 15^2 **b)** 18^3 **c)** p. ex., 2^{12}

13. Par exemple, il est plus rapide d'écrire une puissance que d'écrire le produit de plusieurs facteurs.

Question ouverte

Puissances

Question ouverte

Il est possible de représenter une multiplication répétée de façon plus concise en utilisant une puissance.

Par exemple, 2^4 signi e 2 × 2 × 2 × 2, c'est-à-dire que 2 est multiplié par lui-même 4 fois. On peut donc parler de puissance, puisqu'il s'agit du produit d'un nombre par lui-même.

Le nombre 2 est la base, le nombre 4 est l'exposant et 2^4 est la puissance.

$$\text{base} \rightarrow 2^4 \leftarrow \text{exposant}$$

- Énumère toutes les puissances que l'on peut obtenir en utilisant les nombres 1, 2, 3, 4 et 5 à la fois comme base et comme exposant, et en utilisant les nombres 0,5 et –2 comme base seulement. Détermine ensuite la valeur de chacune de ces puissances.

- Quelles constatations peux-tu faire au sujet des puissances à partir de ces résultats?

Fiche de réflexion

Puissances (*Suite*)

Fiche de réflexion

La multiplication est une façon de représenter une addition répétée de façon plus concise. Par exemple, il est plus rapide d'écrire 4 × 5 que d'écrire 5 + 5 + 5 + 5.

Pour représenter une multiplication répétée de façon plus concise, on utilise une puissance. Par exemple, 2^4 signi e 2 × 2 × 2 × 2, c'est-à-dire que 2 est multiplié par lui-même 4 fois.

Le nombre 2 est la base, le nombre 4 est l'exposant et 2^4 est la puissance.

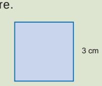
$$\text{base} \rightarrow 2^4 \leftarrow \text{exposant}$$

- Les puissances dont l'exposant est 2 ou 3 portent respectivement le nom de carré et de cube. Par exemple, la puissance 6^2 se lit communément *6 au carré* alors que la puissance 5^3 se lit communément *5 au cube*.

  Dans tous les autres cas, on utilise généralement des nombres ordinaux. Par exemple, 6^5 se lit *la cinquième puissance de 6* ou *6 exposant 5*.

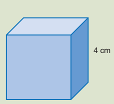
- On associe un carré (ou un nombre à la deuxième puissance) à l'aire d'un carré. Cela nous aide à comprendre pourquoi on utilise, par exemple, les unités cm^2 ou m^2 pour désigner une aire.

  Ce carré a une aire de 9 (3^2) cm^2.



  On associe un cube (ou un nombre à la troisième puissance) au volume d'un cube. Cela nous aide à comprendre pourquoi on utilise, par exemple, les unités cm^3 ou m^3 pour désigner un volume.

  Ce cube a un volume de 64 (4^3) cm^3.

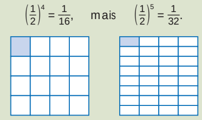


- Les puissances des nombres entiers augmentent rapidement. Par exemple,
  $3^4 = 81$, mais
  $3^5 = 243$ et
  $3^6 = 729$.

Puissances (*Suite*)

- Les puissances ayant comme base un nombre compris entre 0 et 1 diminuent au fur et à mesure que l'exposant augmente. Par exemple,

  $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, mais $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.



$\frac{1}{16}$ $\frac{1}{32}$

- Les puissances de nombres négatifs peuvent avoir une valeur positive ou négative. Si l'exposant est un entier pair, la puissance a une valeur positive; s'il est impair, elle a une valeur négative.

  Par exemple $(–3)^3 = –27$, mais $(–3)^4 = +81$.

1. Écris chaque puissance sous forme d'une multiplication répétée.

   a) 3^4 b) 3^6 c) 4^6

   d) 2^{10} e) $(–3)^4$

2. Représente chaque puissance à l'aide d'un dessin.

   a) 5^3 b) 8^2

Puissances
(*Suite*)

3. Une grande boîte peut contenir 4 boîtes de taille moyenne.

   Chacune des 4 boîtes de taille moyenne peut contenir 4 petites boîtes.

   Chacune des 4 petites boîtes peut contenir 4 très petites boîtes.

   Représente à l'aide d'une puissance, le nombre de très petites boîtes qui peuvent être contenues dans la grande boîte. Explique ton raisonnement.

4. Décris une situation (comme à la question 3) qui peut être représentée par la puissance 6^4.

5. La puissance $(-2)^{\square}$ a une valeur positive. Que peut valoir $\square$?

6. a) Place les puissances suivantes en ordre croissant.

   $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

   b) Place les puissances suivantes en ordre croissant.

   2^3 2^4 2^2 2^5

   c) Que constates-tu en comparant les réponses aux questions a) et b)?

Puissances
(*Suite*)

7. Une puissance, dont la base est 1 de moins que son exposant, a une valeur d'environ 1 000. Quelle est cette puissance?

8. Remplis les cases de sorte que les égalités soient vraies.

   a) $\square^4 = 9^2$ b) $6^8 = 36^{\square}$ c) $25^3 = \square^6$

9. Indique dans chaque cas la puissance ayant la plus grande valeur. Comment le sais-tu?

   a) 2^3 ou 2^5 b) 10^3 ou 9^3 c) 10^3 ou 100^2

10. Remplis les cases de sorte que les énoncés soient vrais.

    a) $\square^3 < \square^2$

    b) $\square^3$ vaut au moins 100 de plus que $\square^2$

    c) $\square^3$ est inférieur à $\frac{1}{5}$ de $\square^2$

11. Explique pourquoi 20^5 est 400 fois plus grand que 20^3.

12. Écris chacune des expressions suivantes sous forme d'une seule puissance.

    a) $3 \times 3 \times 5 \times 5$

    b) $6 \times 6 \times 3 \times 3 \times 6 \times 3$

    c) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

13. Pourquoi est-ce utile de représenter le produit de plusieurs facteurs à l'aide d'une puissance?

Théorème de Pythagore

Question ouverte

Matériel
- calculatrices
- règles
- papier quadrillé

Questions à poser avant de présenter la question ouverte

◊ *Si je dessine un triangle et vous dis qu'il s'agit d'un triangle rectangle, comment pouvez-vous le vérifier?* (Par exemple, je peux utiliser un rapporteur.)
◊ *Y a-t-il un autre moyen?* (Par exemple, je peux le poser sur un quadrillé pour vérifier s'il y a un angle droit.)
◊ *Comment feriez-vous pour dessiner un carré sur un côté d'un triangle si la longueur des côtés du carré doit être égale à la longueur du côté du triangle?* (Par exemple, je mesurerais d'abord la longueur du côté du triangle. Je ferais ensuite un angle droit à chacune des extrémités du côté et j'y tracerais des segments de même longueur que le côté. Je relierais enfin les deux segments obtenus pour former un carré.)

Utilisation de la question ouverte

Les élèves peuvent utiliser du papier quadrillé pour créer les triangles rectangles et une règle pour mesurer les côtés obliques.

En observant ou en écoutant les élèves, notez si elles et ils :
- savent que le théorème de Pythagore ne s'applique qu'aux triangles rectangles;
- comprennent l'utilité du théorème de Pythagore.

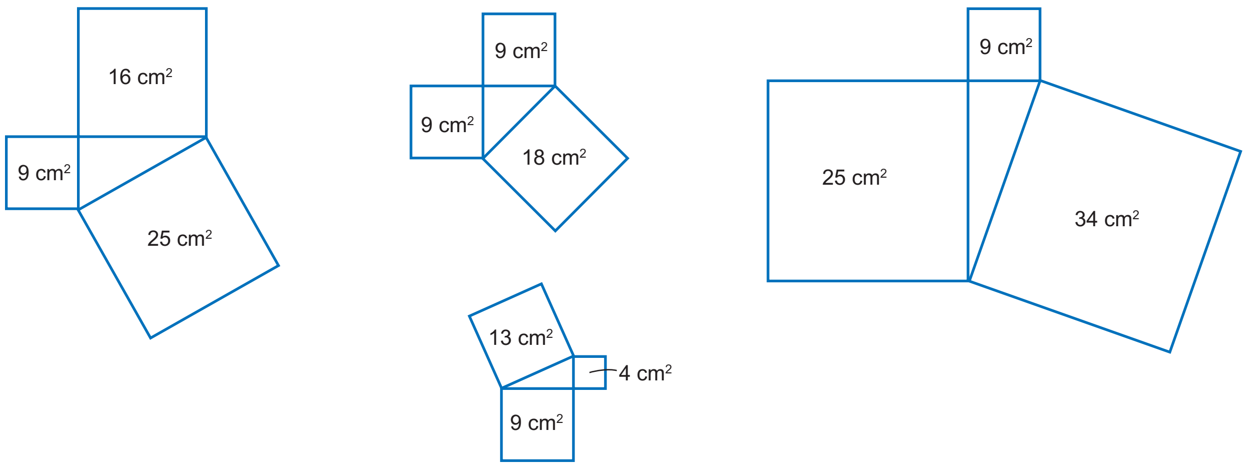
Consolidation et objectivation

Exemples de questions à poser :
◊ *Dans les triangles rectangles, pourquoi le plus grand carré est-il sur l'hypoténuse?* (Par exemple, puisque l'hypoténuse est le côté le plus long d'un triangle rectangle, le carré formé sur l'hypoténuse est celui qui a la plus grande aire.)
◊ *En quoi les triangles rectangles sont-ils différents des autres?* (Par exemple, pour ces triangles, la somme des aires des carrés formés sur les deux côtés les plus courts est égale à l'aire du carré formé sur l'hypoténuse.)
Note : Dites aux élèves que cette relation, propre au triangle rectangle, s'appelle le théorème de Pythagore et qu'elle peut être représentée à l'aide de l'équation usuelle $a^2 + b^2 = c^2$. Indiquez que *a*, *b* et *c* représentent les longueurs des trois côtés, *c* étant la longueur de l'hypoténuse.
◊ *De quelle façon l'équation* $a^2 + b^2 = c^2$ *décrit-elle la relation entre les aires des carrés formés sur les côtés d'un triangle rectangle?* (Par exemple, dans l'équation, $a^2 + b^2$ représente la somme des aires des carrés formés sur les deux côtés les plus courts et c^2 représente l'aire du carré formé sur l'hypoténuse.)
◊ *Comment pouvez-vous utiliser le théorème de Pythagore pour déterminer la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle sachant que les deux autres côtés mesurent respectivement 4 unités et 3 unités?* (Par exemple, je peux additionner 16 et 9, ce qui me donne 25. Ceci étant l'aire du carré formé sur l'hypoténuse, il suffit d'en extraire la racine carrée pour obtenir la longueur de l'hypoténuse.)
◊ *Comment pouvez-vous utiliser le théorème de Pythagore pour démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle?* (Par exemple, si la somme des aires des carrés formés sur les deux côtés les plus courts du triangle est différente de l'aire du carré formé sur le côté le plus long, alors ce n'est pas un triangle rectangle.)

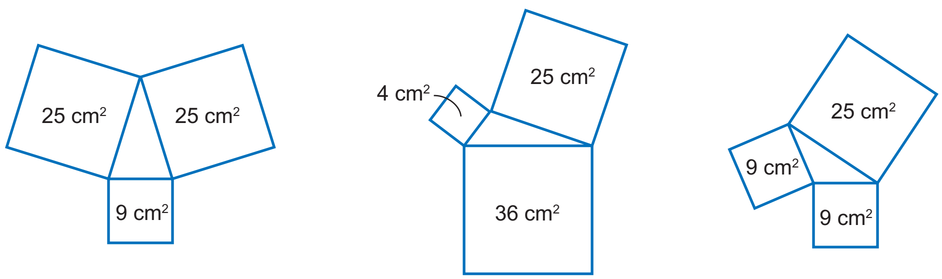
Solutions

Exemples

Triangles rectangles



Triangles non rectangles



- Exemples de constatations possibles :
  - Dans le cas des triangles rectangles, la somme des aires des deux plus petits carrés est égale à l'aire du plus grand carré.
  - Cette relation n'est pas vraie dans le cas des triangles non rectangles.
  - On peut savoir si un triangle est rectangle en vérifiant si la somme des aires des deux plus petits carrés est égale à l'aire du plus grand carré.

- Par exemple, je détermine d'abord l'aire de chacun des carrés formés sur les côtés de longueur connue. Ensuite :
  - si les côtés connus sont les deux plus courts, je détermine l'aire du carré formé sur le troisième côté (dans ce cas, l'hypoténuse) en additionnant les deux aires, puis je détermine la longueur du troisième côté en extrayant la racine carrée de ce résultat;
  - si l'un des côtés connus est l'hypoténuse, je détermine l'aire du carré formé sur le troisième côté en soustrayant les deux aires, puis je détermine la longueur du troisième côté en extrayant la racine carrée de ce résultat.

Fiche de réflexion

Matériel
- calculatrices
- règles
- papier quadrillé

Questions à poser avant de présenter la fiche de réflexion

◊ *Si je dessine un triangle et vous dis qu'il s'agit d'un triangle rectangle, comment pouvez-vous le vérifier?* (Par exemple, je peux utiliser un rapporteur.)
◊ *Y a-t-il un autre moyen?* (Par exemple, je peux le poser sur un quadrillé pour vérifier s'il y a un angle droit.)
◊ *Si vous connaissez la longueur de chacun des côtés d'un triangle, pouvez-vous déterminer s'il s'agit ou non d'un triangle rectangle?* (Oui parfois. Par exemple, si je sais que chacun des trois côtés mesure 4 cm, je sais alors qu'il s'agit d'un triangle équilatéral et non pas d'un triangle rectangle.)

Utilisation de la fiche de réflexion

Lisez l'encadré avec les élèves et répondez, s'il y a lieu, à leurs questions.

Demandez-leur de répondre aux questions qui suivent l'encadré. Mettez à leur disposition du papier quadrillé, des calculatrices et des règles.

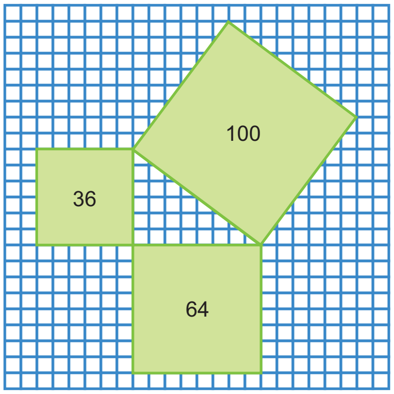
En observant ou en écoutant les élèves, notez si elles et ils :
- savent interpréter géométriquement le théorème de Pythagore;
- savent utiliser le théorème de Pythagore pour déterminer la longueur manquante d'un des côtés d'un triangle rectangle;
- savent utiliser le théorème de Pythagore pour déterminer si un triangle est rectangle ou non;
- comprennent que différents triangles rectangles peuvent avoir la même longueur d'hypoténuse;
- comprennent que l'on ne peut pas utiliser le théorème de Pythagore pour déterminer la longueur manquante d'un des côtés d'un triangle à moins de savoir qu'il s'agit bel et bien d'un triangle rectangle.

Consolidation et objectivation

Exemples de questions à poser :
◊ *En quoi votre dessin à la question 1 illustre-t-il le théorème de Pythagore?* (Par exemple, la somme des aires 36 et 64 donne 100, ce qui correspond à l'aire du carré formé sur l'hypoténuse.)
◊ *Comment le théorème de Pythagore a-t-il été utile pour répondre à la question 2?* (Par exemple, j'ai substitué les valeurs appropriées aux variables a, b ou c dans l'équation $a^2 + b^2 = c^2$, puis j'ai résolu l'équation pour obtenir la valeur manquante.)
◊ *Comment le théorème de Pythagore a-t-il été utile pour répondre à la question 3?* (Par exemple, j'ai vérifié si la somme des carrés des deux plus petites longueurs était égale au carré de la plus grande longueur.)
◊ *Quel triangle rectangle avez-vous utilisé pour la question 5?* (Par exemple, j'ai utilisé le triangle rectangle obtenu après avoir dessiné la hauteur du triangle donné.)
◊ *En quoi était-il prévisible que les longueurs des diagonales des carrés à la question 8 soient différentes?* (Par exemple, parce que les longueurs des côtés sont différentes d'un carré à l'autre.)
◊ *En plus de connaître la longueur de deux des côtés d'un triangle rectangle, que faut-il savoir pour déterminer la longueur du troisième côté?* (Par exemple, il faut savoir si l'une des deux longueurs données correspond à la longueur de l'hypoténuse.)

Solutions

1\.



Par exemple, les carrés dessinés ont une aire de 36, 64 et 100 unités carrées, illustrant ainsi le fait que la somme des aires des deux plus petits carrés est égale à l'aire du plus grand carré. Ceci correspond à la relation que sous-tend le théorème de Pythagore.

2\. **a)** 13 cm **b)** environ 8,94 cm
c) environ 11,62 cm **d)** 24 cm

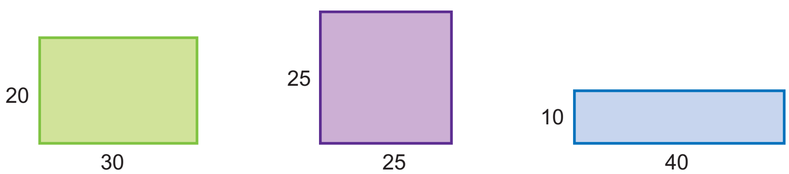
3\. **a)** Ce n'est PAS un triangle rectangle. **b)** C'est un triangle rectangle.
c) C'est un triangle rectangle, puisque $10^2 + 24^2 = 676$ et que $26^2 = 676$.

4\. environ 12,17 m

5\. environ 9,54 cm

6\. environ 1 598 m + 1 498 m ou 3 096 m

7\.



Les diagonales mesurent respectivement environ 36 m, 35 m et 41 m.

8\. **a)** 5,66 cm **b)** 8,49 cm **c)** 9,9 cm
Les quotients valent toujours environ 1,41.

9\. p. ex., 6 cm et 8 cm 7,07 cm et 7,07 cm 5 cm et 8,66 cm

10\. Non, puisque 5 peut être la longueur de l'hypoténuse ou de l'un des autres côtés.

11\. Par exemple, les longueurs peuvent être 3 cm, 4 cm et 5,2 cm. Je sais que le triangle de longueurs 3 cm, 4 cm et 5 cm est un triangle rectangle puisque 9 + 16 = 25. En augmentant juste un peu la longueur de l'un des côtés, on obtient un triangle qui n'est plus rectangle, mais qui l'est presque.

Question ouverte

Théorème de Pythagore

Question ouverte

- Dessine 4 triangles rectangles et 3 triangles non rectangles. Dessine ensuite sur chacun des côtés de ces triangles, un carré dont la longueur des côtés est égale à la longueur du côté correspondant du triangle.
- Pour chaque triangle, compare l'aire totale des deux plus petits carrés avec l'aire du carré le plus grand. Que constates-tu?
- Si tu connais la longueur de deux des côtés d'un triangle rectangle, comment peux-tu utiliser tes constatations pour déterminer la longueur du troisième côté?

Fiche de réflexion

Théorème de Pythagore (*Suite*)

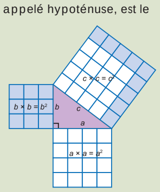
Fiche de réflexion

Les triangles rectangles possèdent une propriété particulière.

Lorsque l'on connaît la longueur de deux des côtés d'un triangle rectangle et que l'on sait de quels côtés il s'agit, on peut facilement déterminer la longueur du troisième côté. Ceci tient du fait que l'aire totale des deux carrés que l'on peut former à partir des deux côtés les plus courts d'un triangle rectangle est égale à l'aire du carré que l'on peut former à partir du côté le plus long.

Note : Dans un triangle rectangle, le côté le plus long, appelé hypoténuse, est le côté opposé à l'angle droit.

Puisque l'aire d'un carré est égale au carré de son côté, on peut représenter la relation entre les aires des carrés formés à partir des côtés d'un triangle rectangle à l'aide de l'équation $a^2 + b^2 = c^2$, où a et b représentent la longueur des deux côtés les plus courts et c représente la longueur de l'hypoténuse.



Cette relation s'appelle le théorème de Pythagore. Elle ne s'applique pas à tous les triangles.

Si l'on connaît la longueur de deux des côtés d'un triangle rectangle, on peut utiliser le théorème de Pythagore pour déterminer la longueur du troisième côté. Par exemple, si l'on sait que l'hypoténuse mesure 12 cm et que l'un des deux autres côtés mesure 4 cm, alors on obtient :

$a^2 = 12^2 - 4^2 = 128$; on a donc $a = \sqrt{128}$, soit environ 11,3 cm.

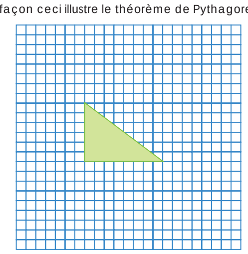
- Puisque cette relation n'est valable que pour les triangles rectangles, on peut s'en servir pour déterminer si un triangle est rectangle ou pas sans avoir à le dessiner.

  Par exemple, si les côtés d'un triangle mesurent respectivement 9, 12 et 15 unités; il s'agit d'un triangle rectangle, puisque $9^2 + 12^2 = 225 = 15^2$.

  Si les côtés d'un triangle mesurent respectivement 5, 7, et 9 unités, ce n'est pas un triangle rectangle, puisque $5^2 + 7^2 = 74$ alors que $9^2 = 81$.

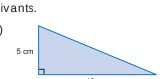
Théorème de Pythagore (*Suite*)

1. Sur chaque côté du triangle rectangle ci-dessous, dessine un carré dont la longueur des côtés est égale à la longueur du côté sur lequel il est dessiné. Explique de quelle façon ceci illustre le théorème de Pythagore.

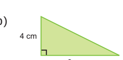


2. Détermine la longueur du troisième côté de chacun des triangles rectangles suivants.

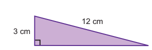
a)



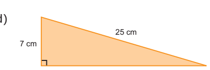
b)



c)



d)



3. Les mesures suivantes représentent les longueurs des côtés d'un triangle. Détermine dans chaque cas s'il s'agit ou non d'un triangle rectangle. Explique ton raisonnement pour ta réponse à la question c).

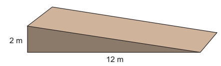
   a) 5 cm, 8 cm, 11 cm

   b) 24 cm, 32 cm, 40 cm

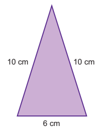
   c) 10 cm, 24 cm, 26 cm

Théorème de Pythagore *(Suite)*

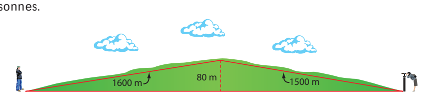
4. Une rampe a une base de 12 m et une hauteur de 2 m. Détermine la longueur de la rampe.



5. Sans utiliser une règle, détermine la hauteur du triangle suivant.



6. Deux personnes sont situées de part et d'autre d'une colline de 80 m de hauteur comme illustré ci-dessous. Détermine la distance horizontale entre les deux personnes.

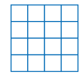


7. Dessine trois rectangles différents ayant chacun un périmètre de 100 cm. Détermine ensuite la longueur des diagonales de chaque rectangle.

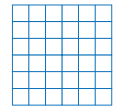
Théorème de Pythagore *(Suite)*

8. Détermine la longueur des diagonales de chaque carré. Divise la longueur de chaque diagonale par la longueur du côté du carré correspondant. Que constates-tu?

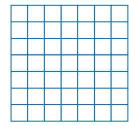
a)



b)



c)



9. Trois triangles rectangles différents ont une hypoténuse de 10 cm. Détermine les longueurs approximatives possibles des deux autres côtés de chacun de ces triangles.

10. Existe-t-il un seul triangle rectangle dont un côté mesure 3 cm et un autre mesure 5 cm? Justi e ta réponse.

11. Un triangle est presque rectangle, mais pas tout à fait. Quelles peuvent être les longueurs de ses côtés? Comment le sais-tu?