

RÉDUCTION DES ÉCARTS DE RENDEMENT

9^e année

Module 8 :
Périmètre et aire de
figures planes

Guide pédagogique

Module 8

Périmètre et aire de figures planes

Contenus d'apprentissage	3
Évaluation diagnostique	4
Matériel d'appui	7
Aire de parallélogrammes, de triangles et de trapèzes	8
Aire de figures composées	17
Circonférence et aire de cercles	25

CONTENUS D'APPRENTISSAGE

Exemples de contenus d'apprentissage qui font appel au périmètre et à l'aire de figures planes

MPM1D

Mesure et géométrie

- déterminer le périmètre et l'aire de figures planes simples et composées, y compris les situations faisant appel aux valeurs exactes.
- déterminer la dimension manquante d'une figure plane d'une aire ou d'un périmètre donnés, y compris les situations faisant appel aux valeurs exactes.
- résoudre des problèmes portant sur le périmètre et sur l'aire d'une figure plane, dans des situations tirées de la vie courante et dans des situations faisant appel aux valeurs exactes.
- examiner la vraisemblance des résultats obtenus en tenant compte du contexte et en ayant recours au calcul mental et à l'estimation.

Numération et algèbre

- utiliser des variables et des symboles afin de générer une formule.
- attribuer des valeurs numériques à des variables dans une formule et résoudre l'équation qui en résulte.
- isoler une variable dans une formule.

MFM1P

Mesure et géométrie

- résoudre, à l'aide du théorème de Pythagore, des problèmes portant sur le périmètre et l'aire de figures simples et composées...
- déterminer le périmètre et l'aire de figures planes simples et composées.
- résoudre des problèmes portant sur le périmètre et l'aire de figures planes dans des situations tirées de la vie courante.
- examiner la vraisemblance des résultats obtenus en tenant compte du contexte et en ayant recours au calcul mental et à l'estimation.

Numération et algèbre

- attribuer des valeurs numériques à des variables dans une formule et résoudre l'équation qui en résulte.

ÉVALUATION DIAGNOSTIQUE

Remettre aux élèves une copie de l'évaluation diagnostique (voir Guide de l'élève) et leur accorder suffisamment de temps pour répondre aux questions. Si des élèves ont de la difficulté à comprendre le sens d'une question, n'hésitez pas à leur expliquer.

Corriger les évaluations et planifier les interventions pédagogiques en fonction de l'analyse des résultats obtenus.

Ce guide contient du matériel d'appui relatif :

- à l'aire de parallélogrammes, de triangles et de trapèzes;
- à l'aire de figures composées;
- à la circonférence et à l'aire de cercles.

Il n'est pas nécessaire d'utiliser tout ce matériel. Le tableau suivant propose une façon de choisir le matériel d'appui en fonction des difficultés observées lors de l'analyse des résultats.

Matériel

- surligneurs
- annexe *Fiche de rappel de formules*

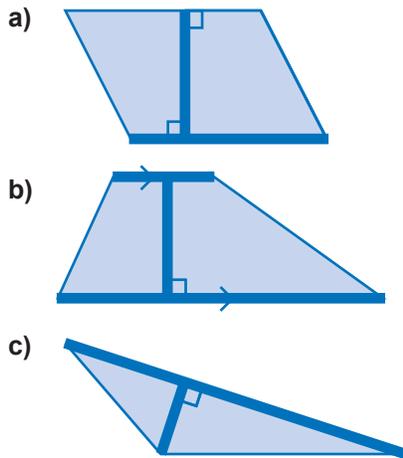
Résultats	Matériel d'appui suggéré
Les élèves éprouvent des difficultés avec les questions 1 à 4.	Utiliser la section « Aire de parallélogrammes, de triangles et de trapèzes ».
Les élèves éprouvent des difficultés avec les questions 5 à 7.	Utiliser la section « Aire de figures composées ».
Les élèves éprouvent des difficultés avec les questions 8 à 11.	Utiliser la section « Circonférence et aire de cercles ».

Note : Des élèves peuvent éprouver des difficultés à déterminer l'aire de parallélogrammes, de triangles, de trapèzes, de cercles et de figures composées, ou à déterminer la circonférence de cercles, notamment parce qu'elles et ils :

- multiplient la mesure de deux côtés adjacents d'un parallélogramme pour déterminer son aire au lieu de multiplier la base et la hauteur;
- multiplient par deux le produit de la base et de la hauteur d'un triangle pour déterminer son aire au lieu de diviser ce produit par deux;
- multiplient la hauteur d'un trapèze soit par une seule base, soit par le produit de ses deux bases pour déterminer son aire au lieu de multiplier la hauteur par la moyenne des deux bases;
- utilisent un troisième côté d'un trapèze au lieu de sa hauteur pour déterminer son aire;
- ne sont pas capables de visualiser la manière de décomposer une figure donnée en figures planes simples pour déterminer son aire;
- ont de la difficulté à déduire, à partir de certaines mesures données d'une figure composée, les mesures qui sont nécessaires pour déterminer son aire;
- confondent le rayon et le diamètre dans les formules pour déterminer l'aire et la circonférence d'un cercle;
- ne réalisent pas que pour déterminer l'aire d'une surface donnée, il est parfois utile de soustraire l'aire d'une figure de l'aire d'une autre figure;
- ne sont pas capables d'appliquer les formules appropriées dans le cas de figures composées complexes.

Solutions

1. Exemples

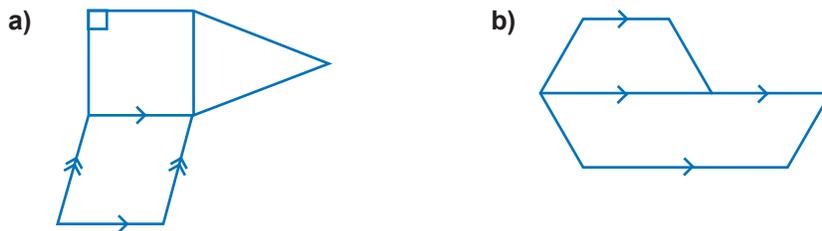


2. a) 9 unités carrées b) 20 unités carrées c) 42 unités carrées

3. 5 cm

4. Par exemple, une hauteur de 4 cm et des bases de 3 cm et de 7 cm.

5. Exemples



6. a) Le grand rectangle a une aire de 40 cm^2 (4×10).
Le triangle de droite a une base de 7 cm ($10 - 3$) et une hauteur de 6 cm ($10 - 4$),
donc une aire de 21 cm^2 .
L'aire totale de la figure est de 61 cm^2 ($40 + 21$).

b) Le trapèze au centre a une aire de 16 cm^2 $\left(4 \times \frac{(3 + 5)}{2}\right)$.

Le triangle de gauche a une aire de $2,5 \text{ cm}^2$ $\left(\frac{(5 \times 1)}{2}\right)$.

Le triangle de droite a une base de 3 cm et une hauteur de 2 cm ($6 - 4$), donc une
aire de 3 cm^2 $\left(\frac{(3 \times 2)}{2}\right)$.

L'aire totale de la figure est de $21,5 \text{ cm}^2$ ($16 + 2,5 + 3$).

7. a) 15 cm^2 b) 10 cm^2

Note : Pour les réponses faisant appel au nombre π , on donne la valeur exacte en termes de π et une valeur approximative calculée en fonction de la valeur de π arrondie à 3,14.

8. a) $25\pi \text{ cm}^2$ (ou $78,5 \text{ cm}^2$) b) $10\pi \text{ cm}$ (ou $31,4 \text{ cm}$)

9. Puisque $\pi d = 12$, alors $d = \frac{12}{\pi} \text{ cm}$ (ou $3,8 \text{ cm}$).

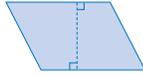
10. b

11. a, c, e

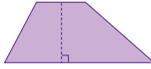
Évaluation diagnostique

1. Sur chacune des figures suivantes, indique à l'aide d'un surligneur les segments de droite dont on doit nécessairement connaître la mesure pour être à même de déterminer l'aire.

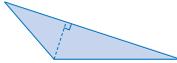
a) Parallélogramme



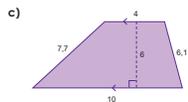
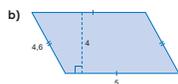
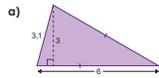
b) Trapèze



c) Triangle



2. Détermine l'aire de chacune des figures suivantes.



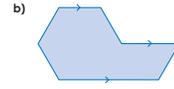
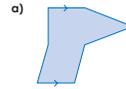
Évaluation diagnostique

(Suite)

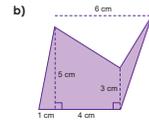
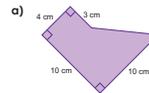
3. Un triangle a une base de 5 cm et une hauteur de 10 cm. Un parallélogramme ayant une base de 5 cm a la même aire que le triangle. Quelle est la hauteur du parallélogramme?

4. Quelles peuvent être les mesures de la hauteur et des bases d'un trapèze ayant une aire de 20 cm²?

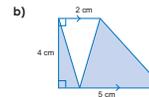
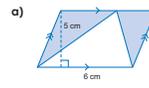
5. Décompose chacune des figures suivantes en figures planes simples (p. ex., triangles, rectangles, parallélogrammes ou trapèzes).



6. Détermine l'aire de chacune des figures suivantes. Explique ta démarche.



7. Détermine l'aire totale des surfaces ombrées de chacune des figures suivantes.



Évaluation diagnostique

(Suite)

8. Un cercle a un diamètre de 10 cm.

a) Quelle est l'aire de ce cercle?



b) Quelle est la circonférence de ce cercle?

9. La circonférence d'un cercle est égale au périmètre d'un carré dont les côtés mesurent 3 cm. Quel est le diamètre du cercle? Explique ta réponse.

10. Une ficelle est 3 fois plus longue que le diamètre d'un cercle. Lequel des énoncés suivants est alors vrai?

- La ficelle pourrait faire presque la moitié du tour du cercle.
- La ficelle pourrait faire presque le tour complet du cercle.
- La ficelle pourrait faire le tour complet du cercle et un peu plus.
- La ficelle pourrait faire presque 2 fois le tour complet du cercle.

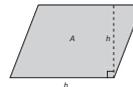
11. Un cercle a une aire d'environ 20 cm². Lesquels des énoncés suivants sont alors vrais?

- Le rayon mesure environ 2,5 cm.
- Le rayon mesure environ 5 cm.
- Le diamètre mesure environ 5 cm.
- Le diamètre mesure environ 10 cm.
- La circonférence mesure environ 15 cm.
- La circonférence mesure environ 30 cm.

Fiche de rappel de formules

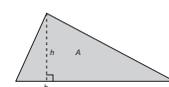
Aire d'un parallélogramme

$$A = bh$$



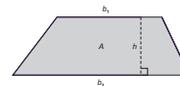
Aire d'un triangle

$$A = \frac{1}{2}bh$$



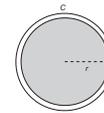
Aire d'un trapèze

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$



Circonférence d'un cercle

$$C = 2\pi r$$



Aire d'un cercle

$$A = \pi r^2$$



MATÉRIEL D'APPUI

L'objectif du matériel d'appui est d'aider les élèves à développer les habiletés de base pour traiter le périmètre et l'aire de figures planes simples et composées.

Chaque section du matériel d'appui comprend deux approches : l'approche par question ouverte (tâche unique) et l'approche par fiche de réflexion (tâches multiples). Les deux portent sur les mêmes contenus d'apprentissage; elles représentent des façons différentes d'interagir avec les élèves et de les mobiliser. Vous pouvez choisir une seule approche ou alterner entre les deux, dans l'ordre de votre choix.

Des interventions vous sont proposées pour faciliter l'apprentissage avant, pendant et après l'utilisation de l'approche de votre choix. Elles sont présentées en trois parties comme suit :

- Questions à poser avant de présenter la question ouverte ou la fiche de réflexion;
- Utilisation de la question ouverte ou de la fiche de réflexion;
- Consolidation et objectivation.

Aire de parallélogrammes, de triangles et de trapèzes

Question ouverte

Matériel

- règles
- annexes *Fiche de rappel de formules* et *Rectangle et parallélogramme*

Questions à poser avant de présenter la question ouverte

- ◇ Si je vous présente un rectangle, quelles sont les mesures que vous devez connaître pour déterminer son aire? (Par exemple, les mesures de sa base et de sa hauteur.)
- ◇ Est-il possible de déterminer l'aire du rectangle sans le voir, c'est-à-dire en utilisant seulement sa base et sa hauteur? (Oui.)
- ◇ En quoi un parallélogramme diffère-t-il d'un rectangle? (Par exemple, un parallélogramme n'a pas nécessairement d'angle droit; il peut donc être « incliné ».)

Présentez aux élèves l'annexe intitulée *Rectangle et parallélogramme* et démontrez-leur à l'aide d'une règle que les mesures des côtés du rectangle et du parallélogramme sont les mêmes.

- ◇ Puisque ces deux figures ont les mêmes mesures des côtés, ont-elles la même aire?
(Par exemple, je pense que non puisque l'aire du rectangle semble plus grande que l'aire du parallélogramme.)

Utilisation de la question ouverte

Assurez-vous que les élèves comprennent qu'elles et ils doivent assigner 3 valeurs différentes à l'aire commune et, dans chaque cas, proposer 2 ensembles différents de dimensions pour chaque figure. Les valeurs assignées peuvent être entières ou rationnelles.

En observant ou en écoutant les élèves, notez si elles et ils :

- peuvent utiliser les formules d'aire pour établir la relation entre l'aire de triangles, de parallélogrammes ou de trapèzes et leurs dimensions;
- comprennent que la hauteur d'un triangle ayant la même aire et la même base qu'un parallélogramme donné est égale au double de la hauteur du parallélogramme;
- comprennent qu'un triangle, un parallélogramme et un trapèze peuvent avoir la même hauteur et la même aire, mais différentes bases;
- reconnaissent que si l'on augmente la base d'un triangle ou d'un parallélogramme sans modifier son aire, on doit diminuer sa hauteur;
- comprennent qu'il est possible de diviser l'aire par la hauteur pour déterminer la mesure de la base d'un parallélogramme ou la moyenne des mesures des deux bases d'un trapèze.

Consolidation et objectivation

Exemples de questions à poser :

- ◇ *Quelle aire avez-vous choisie en premier? (p. ex., 100 cm²)*
- ◇ *Comment avez-vous choisi les dimensions d'un parallélogramme ayant cette aire? (Par exemple, j'ai pensé à deux nombres dont le produit est égal à 100. L'un des nombres correspond à la base et l'autre correspond à la hauteur.)*
- ◇ *Qu'avez-vous modifié dans votre démarche pour déterminer les dimensions du triangle? (Par exemple, j'ai utilisé la même base, mais j'ai doublé la mesure de la hauteur.) Pour quelle raison? (Par exemple, parce que l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de la base et de la hauteur.)*
- ◇ *Qu'avez-vous modifié dans votre démarche pour déterminer les dimensions du trapèze? (Par exemple, j'ai utilisé la même hauteur que pour le parallélogramme, soit 10, mais il me fallait deux bases ayant une longueur moyenne de 10. J'ai donc utilisé 6 et 14 de manière que la base supérieure à 10 et la base inférieure à 10 présentent le même écart par rapport à 10.)*
- ◇ *Pourquoi avez-vous choisi des nombres tels que 100, 50 et 40 comme valeurs pour les aires? (Par exemple, parce que ces nombres ont plusieurs facteurs entiers que je pouvais utiliser comme mesure pour les bases et les hauteurs.)*
- ◇ *Qu'auriez-vous modifié dans votre démarche si l'on avait assigné à l'aire une valeur de 35,2? (Par exemple, j'aurais choisi n'importe quel nombre pour la hauteur et j'aurais effectué des divisions à l'aide de ma calculatrice pour déterminer les mesures des bases de chacune des figures.)*

Solutions

Exemples

Étape 1

Aire = 100 cm²

Parallélogramme : base de 10 cm, hauteur de 10 cm

Triangle : base de 20 cm, hauteur de 10 cm

Trapèze : hauteur de 10 cm, bases de 8 cm et de 12 cm

Étape 2

Parallélogramme : base de 50 cm, hauteur de 2 cm

Triangle : base de 50 cm, hauteur de 4 cm

Trapèze : hauteur de 5 cm, bases de 16 cm et de 24 cm

Étape 3

Aire = 50 cm²

Parallélogramme : base de 10 cm, hauteur de 5 cm

Triangle : base de 10 cm, hauteur de 10 cm

Trapèze : hauteur de 5 cm, bases de 8 cm et de 12 cm

Parallélogramme : base de 25 cm, hauteur de 2 cm

Triangle : base de 25 cm, hauteur de 4 cm

Trapèze : hauteur de 10 cm, bases de 3 cm et de 7 cm

Aire = 40 cm²

Parallélogramme : base de 10 cm, hauteur de 4 cm

Triangle : base de 10 cm, hauteur de 8 cm

Trapèze : hauteur de 5 cm, bases de 6 cm et de 10 cm

Parallélogramme : base de 8 cm, hauteur de 5 cm

Triangle : base de 8 cm, hauteur de 10 cm

Trapèze : hauteur de 8 cm, bases de 3 cm et de 7 cm

Fiche de réflexion

Matériel

- règles
- annexes *Fiche de rappel de formules* et *Rectangle et parallélogramme*

Questions à poser avant de présenter la fiche de réflexion

- ◇ Si je vous présente un rectangle, quelles sont les mesures que vous devez connaître pour déterminer son aire? (Par exemple, les mesures de sa base et de sa hauteur.)
- ◇ Est-il possible de déterminer l'aire du rectangle sans le voir, c'est-à-dire en utilisant seulement sa base et sa hauteur? (Oui.)
- ◇ En quoi un parallélogramme diffère-t-il d'un rectangle? (Par exemple, un parallélogramme n'a pas nécessairement d'angle droit; il peut donc être « incliné ».)

Présentez aux élèves l'annexe intitulée *Rectangle et parallélogramme* et démontrez-leur à l'aide d'une règle que les mesures des côtés du rectangle et du parallélogramme sont les mêmes.

- ◇ Puisque ces deux figures ont les mêmes mesures des côtés, ont-elles la même aire?
(Par exemple, je pense que non puisque l'aire du rectangle semble plus grande que l'aire du parallélogramme.)

Utilisation de la fiche de réflexion

Lisez l'encadré avec les élèves et, s'il y a lieu, répondez à leurs questions.

Assurez-vous qu'elles et ils sont capables de différencier les trapèzes des parallélogrammes.

Demandez aux élèves de répondre aux questions qui suivent l'encadré. Mettez à leur disposition des copies de l'annexe intitulée *Fiche de rappel de formules*. Indiquez-leur qu'elles et ils auront aussi besoin d'une règle et d'une calculatrice pour répondre à certaines questions.

En observant ou en écoutant les élèves, notez si elles et ils :

- peuvent utiliser les formules d'aire pour établir la relation entre l'aire de triangles, de parallélogrammes ou de trapèzes et leurs dimensions, et ce, que les dimensions soient données ou qu'elles soient à déterminer;
- reconnaissent quelles dimensions sont nécessaires pour déterminer une aire et lesquelles ne le sont pas;
- peuvent déterminer la hauteur d'un triangle, d'un parallélogramme ou d'un trapèze à partir de son aire et de sa base (ou de ses bases);
- comprennent qu'il est possible d'utiliser différentes combinaisons de base et de hauteur pour déterminer l'aire d'un triangle, mais que toutes doivent donner le même résultat;
- comprennent que la hauteur d'un triangle ayant la même aire et la même base qu'un parallélogramme donné est égale au double de la hauteur du parallélogramme;
- comprennent que différentes figures peuvent avoir la même aire;
- comprennent que si la hauteur et la base d'un triangle mesurent respectivement la moitié de la hauteur et de la base d'un autre triangle, alors l'aire du premier triangle correspond au quart de l'aire du deuxième triangle;
- peuvent développer la formule pour déterminer l'aire d'un trapèze à partir de la formule pour déterminer l'aire d'un triangle.

Consolidation et objectivation

Exemples de questions à poser :

- ◇ À la question 1 b), pourquoi avez-vous utilisé seulement 2 des 3 nombres donnés, et pourquoi avez-vous choisi ces nombres en particulier? (Par exemple, pour déterminer l'aire du parallélogramme, j'ai uniquement besoin de connaître les mesures de la base et de la hauteur et non la mesure de l'autre côté du parallélogramme.)
- ◇ À la question 3 c), en plus de connaître l'aire du trapèze, pourquoi aviez-vous besoin de connaître les mesures des 2 bases pour déterminer sa hauteur? (Par exemple, si l'on ne connaît que la mesure de l'une des bases, différentes combinaisons de mesures pour l'autre base et pour la hauteur permettraient d'obtenir l'aire donnée.)
- ◇ Quelle base et quelle hauteur doit-on utiliser pour déterminer l'aire d'un triangle? (Par exemple, on peut utiliser n'importe quelle base et la hauteur correspondante, cela n'a aucune importance.) Peut-on également utiliser n'importe quelle base et la hauteur correspondante pour déterminer l'aire d'un parallélogramme? (Par exemple, je n'ai pas essayé, mais je pense que oui.)
- ◇ À l'exception de leur aire, qu'est-ce que vos 3 trapèzes à la question 7 ont en commun? (Par exemple, j'ai utilisé la même hauteur pour les trois.) Était-il essentiel de le faire? (Non.)
- ◇ Peut-on diviser n'importe quel trapèze en 2 triangles comme vous l'avez fait pour répondre à la question 11? (Oui car, par exemple, il suffit de relier un des sommets au sommet opposé à l'aide d'une droite.) Quelles seraient les bases et les hauteurs de ces triangles? (Par exemple, chacune des bases du trapèze formerait la base de l'un des triangles et les 2 triangles auraient la même hauteur, soit la hauteur du trapèze.)

Solutions

1. a) 15 unités carrées b) 3 unités carrées
c) 30 unités carrées d) 24 unités carrées
2. a) 32 unités carrées b) 12 unités carrées
c) 20 unités carrées
3. a) 6 cm b) 12 cm c) 5 cm

4. Exemples

- a) 4 cm^2 ($b = 5 \text{ cm}$ et $h = 1,6 \text{ cm}$)



- b) nouvelle base = 3,6 cm

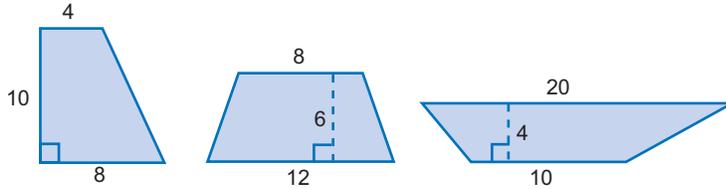


- c) La hauteur doit être égale à $\frac{8}{3,6} = 2,2 \text{ cm}$ puisque $h = \frac{2A}{b}$.
d) 2,2 cm

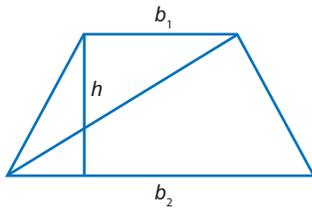
5. Puisque les deux figures ont la même aire et la même base, la hauteur du triangle doit être le double de la hauteur du parallélogramme, car l'aire du parallélogramme est égale au produit de sa base et de sa hauteur alors que l'aire du triangle est égale à la moitié du produit de sa base et de sa hauteur.

6. Par exemple, les mesures de la base et de la hauteur du triangle bleu correspondent à la moitié des mesures de la base et de la hauteur du triangle blanc. Donc, pour déterminer l'aire du triangle bleu à partir de l'aire du triangle blanc, on doit diviser cette aire deux fois par 2, ce qui revient à diviser par 4 ou à prendre $\frac{1}{4}$ de l'aire du triangle blanc.

7. Exemples



8. L'aire est égale à 23,4 m² car, par exemple, l'hexagone est composé de deux trapèzes. Puisque chaque trapèze a une hauteur de 2,6 m ($5,2 \div 2$) et des bases de 3 m et de 6 m, chacun a une aire de 11,7 m² $\left[\frac{1}{2}(3 + 6) \times 2,6 \right]$.
9. 8,25 cm²
10. Par exemple, la somme des mesures de ses bases est égale à 20 cm.
11. L'aire du triangle du haut est égale à $\frac{1}{2}b_1h$ et l'aire du triangle du bas est égale à $\frac{1}{2}b_2h$.
Donc, l'aire du trapèze = $\frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h$.

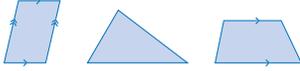


Question ouverte

Aire de parallélogrammes, de triangles et de trapèzes

Question ouverte

Le parallélogramme, le triangle et le trapèze suivants ont la même aire et aucun d'eux n'a d'angle droit.

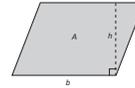


- **Étape 1 :** Assigne une valeur commune à l'aire des trois figures. En tenant compte de l'aire choisie, indique ensuite les dimensions (base, hauteur) que chacune des trois figures pourrait avoir.
- **Étape 2 :** Répète l'étape 1 en utilisant la même aire, mais en proposant des dimensions différentes pour les trois figures.
- **Étape 3 :** Répète les étapes 1 et 2 en utilisant deux aires différentes.

Fiche de rappel de formules

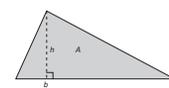
Aire d'un parallélogramme

$$A = bh$$



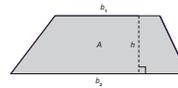
Aire d'un triangle

$$A = \frac{1}{2}bh$$



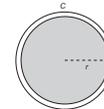
Aire d'un trapèze

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$



Circonférence d'un cercle

$$C = 2\pi r$$



Aire d'un cercle

$$A = \pi r^2$$



Rectangle et parallélogramme



Fiche de réflexion

Aire de parallélogrammes, de triangles et de trapèzes (Suite)

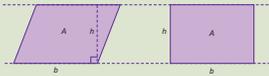
Fiche de réflexion

Une façon de déterminer l'aire d'une figure plane consiste à placer la figure sur un quadrillé et à dénombrer les carrés du quadrillé qui sont ainsi couverts.

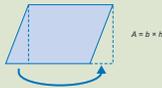
On peut également utiliser une formule qui permet de déterminer l'aire d'une figure plane à partir de ses dimensions.

Aire de parallélogrammes

Supposons qu'un rectangle a la même base et la même hauteur qu'un parallélogramme. On sait que l'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base et de sa hauteur.



Le parallélogramme peut être transformé en rectangle. Par conséquent, si l'on connaît les dimensions de la base et de la hauteur d'un parallélogramme, on peut déterminer son aire en appliquant la même formule que celle que l'on utilise pour déterminer l'aire d'un rectangle.



Il est à noter que la hauteur du parallélogramme est inférieure à la longueur de son côté incliné. Il est donc important d'utiliser les mesures de la base et de la hauteur d'un parallélogramme pour déterminer son aire, et non les mesures de ses côtés.

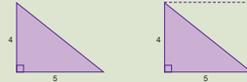
Si l'on connaît l'aire d'un parallélogramme, ainsi que la mesure de sa base ou de sa hauteur, on peut déterminer la dimension manquante en effectuant une division. Par exemple, un parallélogramme ayant une aire de 20 cm² et une base de 4 cm a une hauteur de 5 cm (20 ÷ 4).

Aire de parallélogrammes, de triangles et de trapèzes (Suite)

Aire de triangles

Pour déterminer l'aire de triangles rectangles, il suffit d'utiliser le fait que chaque triangle rectangle correspond à la moitié d'un rectangle.

Par exemple, l'aire du triangle rectangle ci-dessous est égale à $\frac{1}{2}$ de 4×5 :



Il n'est pas aussi simple de visualiser les autres types de triangles en fonction de rectangles. On peut toutefois déterminer leur aire en utilisant le fait qu'ils correspondent à la moitié d'un parallélogramme.



Chaque triangle correspond à la moitié d'un parallélogramme ayant la même base et la même hauteur.

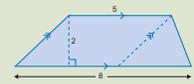
Note : Il est parfois nécessaire, comme pour le triangle de droite, de tracer la hauteur du triangle à l'extérieur de la figure en prolongeant la base.

Tout côté d'un triangle peut être considéré comme la base de ce triangle. En revanche, la hauteur utilisée doit absolument correspondre à la droite qui est perpendiculaire à la base choisie. Comme démontré ci-dessous, il existe trois combinaisons de base et de hauteur dans un triangle.



Aire de trapèzes

Tout trapèze peut être décomposé en un parallélogramme et un triangle. On peut donc déterminer l'aire du trapèze en additionnant l'aire du parallélogramme et l'aire du triangle. Par exemple, dans la figure ci-contre,



Aire de parallélogrammes, de triangles et de trapèzes (Suite)

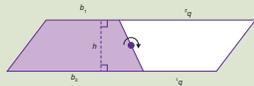
Les 8 unités correspondant à la base du trapèze peuvent être réparties de la manière suivante : 5 unités pour la base du parallélogramme et 3 unités pour la base du triangle. Le parallélogramme et le triangle ont une hauteur égale à 2 unités.

L'aire du parallélogramme est égale à 10 unités carrées (2 × 5).

L'aire du triangle est égale à 3 unités carrées ($\frac{1}{2}$ de 3×2).

Donc, l'aire du trapèze est égale à 13 unités carrées.

On peut également déterminer l'aire d'un trapèze en utilisant le fait que tout trapèze correspond à la moitié d'un parallélogramme. Pour illustrer ce fait, il suffit de faire pivoter une copie du trapèze de 180° en juxtaposant un côté de l'original et un côté de la copie.



La base du parallélogramme ainsi formé est égale à la somme des deux bases du trapèze ($b_1 + b_2$) et sa hauteur est égale à la hauteur du trapèze (h). L'aire du parallélogramme est donc égale à $(b_1 + b_2)h$.

En revanche, l'aire du trapèze est égale à seulement la moitié de l'aire du parallélogramme. Donc, l'aire du trapèze est égale à $\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$.

Ainsi, l'aire du trapèze illustré à la page précédente est égale à 13 unités carrées $\left[\frac{1}{2}(5 + 8) \times 2\right]$.

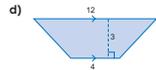
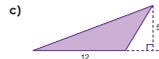
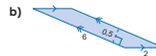
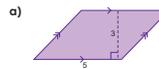
On peut également envisager la formule de la manière suivante : calculer la moyenne des deux bases et la multiplier par la hauteur. Ce raisonnement est logique si l'on considère que l'aire du trapèze correspond à l'aire du rectangle qui a la même hauteur que le trapèze et une base égale à la moyenne des deux bases du trapèze.



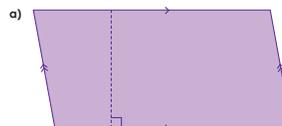
L'aire des deux surfaces blanches supplémentaires correspond à l'aire des deux surfaces triangulaires situées à l'extérieur du rectangle.

Aire de parallélogrammes, de triangles et de trapèzes (Suite)

1. Détermine l'aire de chacune des figures suivantes.

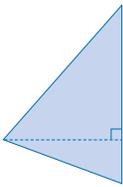


2. Utilise la règle pour obtenir les mesures dont tu as besoin pour déterminer l'aire de chaque figure. Détermine ensuite l'aire de chaque figure et indique les étapes de ta démarche.

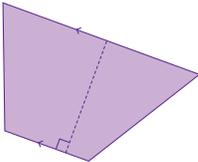


Aire de parallélogrammes, de triangles et de trapèzes (Suite)

b)



c)



3. Détermine la hauteur de chacune des figures planes suivantes.

a) Un parallélogramme ayant une aire de 30 cm^2 et une base de 5 cm .

b) Un triangle ayant une aire de 30 cm^2 et une base de 5 cm .

c) Un trapèze ayant une aire de 30 cm^2 et des bases de 4 cm et de 8 cm .

4. a) Construis un triangle non rectangle et détermine son aire.

Aire de parallélogrammes, de triangles et de trapèzes (Suite)

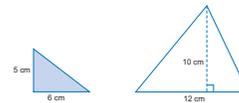
b) Choisis un autre côté du triangle comme base et mesure-le.

c) Détermine la hauteur correspondant à cette base et justifie ta réponse.

d) Vérifie la mesure de la hauteur de ton triangle à l'aide d'une règle.

5. Un parallélogramme et un triangle ont la même base et la même aire. Que sais-tu de leur hauteur respective? Explique ta réponse.

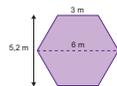
6. Comment peux-tu savoir que l'aire du triangle bleu est égale à $\frac{1}{4}$ de l'aire du triangle blanc sans déterminer l'aire de chaque triangle?



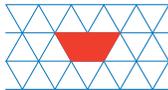
7. Construis 3 trapèzes différents, chacun ayant une aire de 60 unités carrées. Indique ensuite sur chaque trapèze les mesures des bases et de la hauteur.

Aire de parallélogrammes, de triangles et de trapèzes (Suite)

8. Détermine l'aire de l'hexagone régulier suivant et explique ta réponse.



9. Le dallage ci-dessous est composé de triangles équilatéraux ayant une base de 2.5 cm et une hauteur de 2.2 cm . Détermine l'aire du trapèze rouge au centre du dallage.



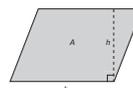
10. Un trapèze a une aire de 100 cm^2 et une hauteur de 10 cm . Que sais-tu d'autre au sujet des dimensions du trapèze?

11. Construis un trapèze quelconque, puis divise-le en deux triangles. Crée une formule pour déterminer l'aire du trapèze en fonction des aires de ces deux triangles. Décris ta démarche.

Fiche de rappel de formules

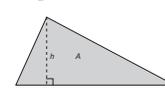
Aire d'un parallélogramme

$$A = bh$$



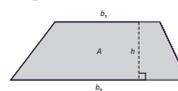
Aire d'un triangle

$$A = \frac{1}{2}bh$$



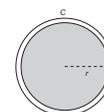
Aire d'un trapèze

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$



Circonférence d'un cercle

$$C = 2\pi r$$



Aire d'un cercle

$$A = \pi r^2$$



Rectangle et parallélogramme



Aire de figures composées

Question ouverte

Matériel

- règles
- calculatrices
- annexe *Fiche de rappel de formules*

Questions à poser avant de présenter la question ouverte

Dessinez un trapèze.

- ◇ *Quelles sont les figures planes simples qui composent ce trapèze? (Par exemple, un parallélogramme et un triangle.)*
- ◇ *Quelle autre figure pouvez-vous composer en assemblant des parallélogrammes et des triangles? (Par exemple, je peux composer une figure en disposant 1 triangle entre 2 parallélogrammes.) Comment pourriez-vous déterminer l'aire de cette nouvelle figure? (Par exemple, j'additionnerais les aires des parallélogrammes et du triangle.)*
- ◇ *Si vous composiez une figure différente à partir de ce triangle et de ces 2 parallélogrammes, est-ce que l'aire de la figure serait différente? (Non, elle serait la même.)*
- ◇ *Si un parallélogramme est tracé à l'intérieur d'un rectangle, comment peut-on déterminer l'aire de la partie du rectangle située à l'extérieur du parallélogramme? (Par exemple, on peut soustraire l'aire du parallélogramme de l'aire du rectangle.)*

Utilisation de la question ouverte

Incitez les élèves à utiliser des triangles, des parallélogrammes et des trapèzes dans leurs constructions. Elles et ils peuvent également choisir d'utiliser des rectangles.

En observant ou en écoutant les élèves, notez si elles et ils :

- peuvent associer l'aire d'une figure composée à la somme des aires des diverses figures planes simples qui la composent;
- peuvent déterminer l'aire d'une figure composée en soustrayant l'aire de deux figures planes simples;
- peuvent appliquer correctement les formules pour déterminer l'aire de parallélogrammes, de triangles et de trapèzes;
- reconnaissent les situations où le fait de déterminer une mesure dans une figure leur permet de déduire une autre mesure de la même figure ou d'une figure adjacente.

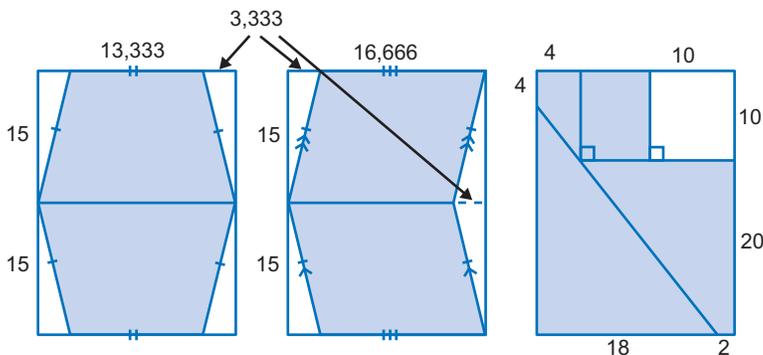
Consolidation et objectivation

Exemples de questions à poser :

- ◇ *Par quoi avez-vous commencé pour résoudre le problème? (Par exemple, j'ai dessiné 2 trapèzes superposés qui occupaient presque toute la surface du rectangle. J'ai dû m'assurer que la surface du rectangle non couverte par la figure avait l'aire appropriée.)*
- ◇ *Comment avez-vous fait pour vous assurer que la surface non couverte avait l'aire appropriée? (Par exemple, j'ai déterminé que l'aire du rectangle était égale à 600 cm^2 (20×30). Étant donné que l'aire de la figure composée devait avoir une aire totale de 500 cm^2 , je savais que je devais laisser une surface non couverte de 100 cm^2 . Puisque cette surface était composée de 4 triangles identiques, j'ai déterminé les dimensions que devait avoir chaque triangle pour que leur aire soit égale à 25 cm^2 .)*
- ◇ *Pourquoi était-il logique que les bases des triangles non couverts par la figure soient si petites? (Par exemple, l'aire de chaque triangle n'était pas très grande tandis que leur hauteur était assez grande.)*
- ◇ *Votre façon de procéder était-elle différente pour vos autres figures? (Par exemple, elle était légèrement différente pour la dernière figure, car la figure composée n'était pas un hexagone.)*
- ◇ *Si les figures avaient été tracées sans les lignes à l'intérieur, aurait-il été facile d'identifier les figures planes simples qui les composent? (Par exemple, je pense que cela aurait été assez facile pour les deux premières figures. Par contre, il aurait probablement été plus difficile de repérer le rectangle dans la dernière figure.)*
- ◇ *Une fois que vous avez déterminé que le petit trapèze de votre dernière figure avait une hauteur de 4 cm , pourquoi avez-vous pu automatiquement en déduire la largeur du rectangle adjacent? (Par exemple, la somme des mesures des 3 segments en haut de la figure devait être égale à 20 cm .)*

Solutions

Exemples



Puisque chaque figure de 500 cm^2 doit être inscrite dans un rectangle ayant une aire de 600 cm^2 (20×30), on doit laisser une surface de 100 cm^2 non couverte par la figure.

Pour la première figure :

J'ai construit un hexagone à partir de 2 trapèzes congruents. Comme il me restait 4 triangles congruents, j'ai conclu que chaque triangle devait avoir une aire de 25 cm^2 .

J'ai noté que les hauteurs des triangles mesuraient 15 cm , soit la moitié de la hauteur du rectangle. Pour déterminer la mesure de la base des triangles, j'ai résolu l'équation $\frac{15b}{2} = 25$ et j'ai obtenu $b = 3,333 \text{ cm}$. J'ai alors déterminé que la petite base de chacun des trapèzes devait mesurer $13,333 \text{ cm}$.

Puisque les 2 trapèzes étaient congruents, chacun devait avoir une aire de 250 cm². J'ai pu le confirmer, à l'aide de la formule pour déterminer l'aire d'un trapèze, en utilisant le fait que chaque trapèze avait une hauteur de 15 cm et des bases de 20 cm et de 13,333 cm.

$$\begin{aligned}\text{Aire} &= \frac{1}{2}(20 + 13,333) \times 15 \\ &= 250 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Pour la deuxième figure :

J'ai construit un hexagone à partir de 2 parallélogrammes congruents. Là encore, j'ai obtenu 4 triangles congruents en divisant le triangle de droite en 2 petits triangles rectangles. J'ai donc pu appliquer le même procédé que celui utilisé pour la première figure.

Étant donné qu'il y avait 2 parallélogrammes congruents, l'aire de chaque parallélogramme devait être égale à 250 cm². J'ai pu le confirmer, à l'aide de la formule pour déterminer l'aire d'un parallélogramme, en utilisant le fait que chaque parallélogramme avait une base de 16,666 cm et une hauteur de 15 cm.

$$\begin{aligned}\text{Aire} &= 16,666 \times 15 \\ &= 250 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Pour la troisième figure :

J'ai commencé par construire un carré de 10 cm sur 10 cm afin de laisser une surface non couverte de 100 cm². J'ai ensuite décomposé la figure restante en 1 triangle, 2 trapèzes et 1 rectangle. À l'aide d'une règle, j'ai obtenu les mesures de quelques segments de droite que j'ai inscrites sur la figure.

J'ai déterminé que :

- l'aire du triangle était égale à 234 cm² $\left(\frac{1}{2} \times 26 \times 18\right)$;
- l'aire du trapèze du bas était égale à 180 cm² $\left[\frac{1}{2}(2 + 16) \times 20\right]$;
- l'aire du trapèze du haut était égale à 28 cm² $\left[\frac{1}{2}(4 + 10) \times 4\right]$;
- l'aire du rectangle était égale à 60 cm² (10 × 6).

J'ai ainsi obtenu une aire totale de 502 cm². Puisque les mesures de certains segments de droite ont été obtenues à l'aide d'une règle, certaines peuvent être imprécises. Je trouve toutefois que mon résultat est assez proche du résultat attendu.

Fiche de réflexion

Matériel

- règles
- calculatrices
- annexe *Fiche de rappel de formules*

Questions à poser avant de présenter la fiche de réflexion

Dessinez un trapèze.

- ◇ *Quelles sont les figures planes simples qui composent ce trapèze? (Par exemple, un parallélogramme et un triangle.)*
- ◇ *Quelle autre figure pouvez-vous composer en assemblant des parallélogrammes et des triangles? (Par exemple, je peux composer une figure en disposant 1 triangle entre 2 parallélogrammes.) Comment pourriez-vous déterminer l'aire de cette nouvelle figure? (Par exemple, j'additionnerais les aires des parallélogrammes et du triangle.)*
- ◇ *Si vous composez une figure différente à partir de ce triangle et de ces 2 parallélogrammes, est-ce que l'aire de la figure serait différente? (Non, elle serait la même.)*
- ◇ *Si un parallélogramme est tracé à l'intérieur d'un rectangle, comment peut-on déterminer l'aire de la partie du rectangle située à l'extérieur du parallélogramme? (Par exemple, on peut soustraire l'aire du parallélogramme de l'aire du rectangle.)*

Utilisation de la fiche de réflexion

Lisez l'encadré avec les élèves et, s'il y a lieu, répondez à leurs questions.

Demandez-leur de répondre aux questions qui suivent l'encadré.

En observant ou en écoutant les élèves, notez si elles et ils :

- peuvent décomposer une figure composée en figures planes simples;
- peuvent identifier les segments de droite dont il faut connaître la mesure pour déterminer l'aire des différentes figures planes qui constituent la figure composée;
- peuvent déterminer l'aire de figures composées de parallélogrammes, de triangles et de trapèzes;
- reconnaissent les situations où le fait de connaître une mesure dans une figure leur permet de déduire une autre mesure de la même figure ou d'une figure adjacente.

Consolidation et objectivation

Exemples de questions à poser :

- ◇ *Existe-t-il plus d'une façon de choisir les figures planes simples qui composent la figure donnée à la question 1a)? (Oui puisque, par exemple, on aurait aussi pu décomposer la figure en 1 trapèze et 2 triangles, ou encore en 3 triangles.)*
- ◇ *Dans quel genre de situation avez-vous choisi d'utiliser la soustraction pour déterminer l'aire d'une figure? (Par exemple, dans les situations où la figure dont on cherche à déterminer l'aire n'est qu'une partie de la figure totale donnée.)*
- ◇ *À la question 3, pourquoi aviez-vous besoin de connaître seulement quelques-unes des dimensions de l'étoile, et non toutes, pour déterminer son aire? (Par exemple, puisque l'étoile est symétrique, les dimensions des 2 petits triangles latéraux sont les mêmes.)*
- ◇ *Auriez-vous pu choisir d'utiliser d'autres dimensions pour déterminer l'aire de cette étoile? (Oui puisque, par exemple, j'aurais pu choisir d'utiliser des bases et des hauteurs différentes pour les triangles que j'ai formés, mais je pense que celles que j'ai retenues sont appropriées.)*
- ◇ *Quelles notions issues des formules pour déterminer l'aire de figures planes avez-vous utilisées pour vous aider à répondre à la dernière question? (Par exemple, pour la partie a), j'ai utilisé le fait que si l'on détermine l'aire d'un triangle en utilisant seulement la moitié de sa hauteur, on obtient la moitié de son aire.)*

Solutions

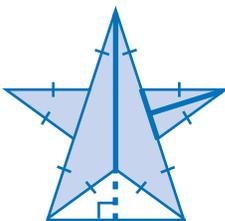
- additionner l'aire du rectangle du bas et l'aire du triangle du haut
 - soustraire l'aire du petit rectangle de l'aire du grand rectangle
 - additionner l'aire du carré au centre à la somme des aires des 4 triangles identiques
 - soustraire l'aire du petit parallélogramme de l'aire du grand parallélogramme
 - additionner les aires des trapèzes du haut et du bas

- 47,5 unités carrées
 - 22 m²
 - 27 m²
 - 12 unités carrées
 - 48 cm²

- Par exemple,

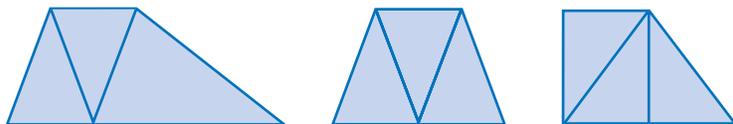
- Je peux former 1 grand triangle au centre et 2 petits triangles latéraux. Pour déterminer l'aire de l'étoile, je dois additionner les aires du grand triangle et des 2 petits triangles latéraux, puis soustraire l'aire du triangle blanc du bas.

-



- environ 9,2 cm²

- Par exemple, j'ai démontré une façon de décomposer un trapèze scalène, un trapèze isocèle et un trapèze rectangle en 3 triangles. Je pense avoir un exemple de tous les types de trapèzes possibles.

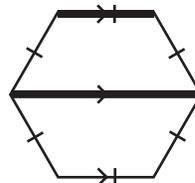


- Par exemple, je dois connaître les mesures de la hauteur et de la petite base de chacun des trapèzes, ainsi que les mesures de la base de chacun des 2 triangles du bas. La somme de ces mesures est égale à la mesure de la grande base du trapèze. La hauteur du trapèze correspond à la hauteur de chaque triangle et la petite base du trapèze correspond à la base du triangle du haut.

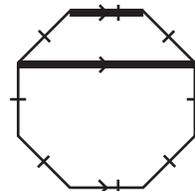
- Oui car, par exemple, la mesure du côté gauche correspond à la hauteur du trapèze. Puisque j'ai les mesures de la hauteur et des 2 bases, je peux déterminer l'aire du trapèze à l'aide de la formule.

- Non puisque, par exemple, je ne connais pas la mesure de la hauteur du trapèze.

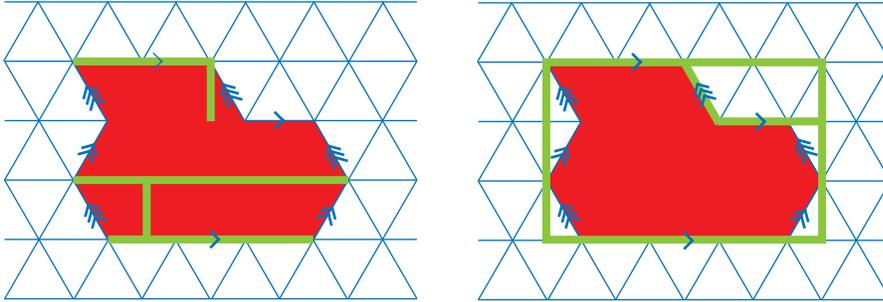
- Par exemple, je peux décomposer l'hexagone en 2 trapèzes. J'aurais seulement besoin de mesurer un des côtés de l'hexagone, ainsi que sa largeur. Je pourrais déterminer la hauteur de chaque trapèze en utilisant le théorème de Pythagore.



- Par exemple, je peux décomposer l'octogone en 2 trapèzes et 1 rectangle. Comme pour l'hexagone, j'aurais seulement besoin de mesurer un des côtés de l'octogone, ainsi que sa largeur. Je pourrais déterminer la hauteur de chaque trapèze en utilisant le théorème de Pythagore.



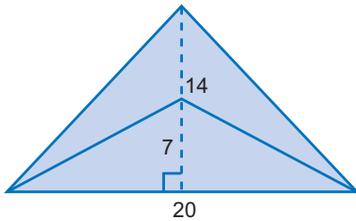
7. Par exemple,



Première figure : Je peux décomposer la figure en 2 trapèzes et 1 parallélogramme. L'aire de la figure colorée est égale à la somme des aires de ces 3 figures. J'aurais besoin de connaître les mesures de la base et de la hauteur du parallélogramme, de même que les mesures des 2 bases et de la hauteur de l'un des trapèzes.

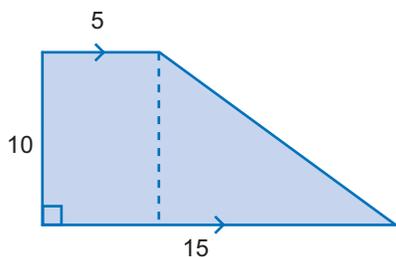
Deuxième figure : Je trace d'abord un rectangle autour de la figure colorée. Je peux ensuite déterminer l'aire de cette figure en soustrayant de l'aire du rectangle, l'aire des figures non colorées qui se trouvent à l'intérieur de ce rectangle (1 trapèze et 4 triangles). J'aurais besoin de connaître les mesures des 2 bases et de la hauteur du trapèze non coloré. De ces mesures, je pourrais déduire la longueur du rectangle (2 fois la mesure de la grande base du trapèze) ainsi que sa largeur (3 fois la mesure de la hauteur du trapèze). Je pourrais aussi déduire les dimensions de chacun des 4 petits triangles non colorés.

8. a) Par exemple,



Le triangle du bas et le chevron du haut ont la même aire. Le triangle a une base de 20 unités et une hauteur de 7 unités; son aire est donc de 70 unités carrées. La figure complète est un triangle ayant une base de 20 unités et une hauteur de 14 unités; son aire est donc de 140 unités carrées. Par conséquent, l'aire du chevron est aussi de 70 unités carrées ($140 - 70$).

b) Par exemple,



Le rectangle de gauche et le triangle de droite ont la même aire. Le rectangle a une aire de 50 unités carrées (5×10). Le triangle a une base de 10 unités et une hauteur de 10 unités. Son aire est donc elle aussi égale à 50 unités carrées ($\frac{1}{2} \times 10 \times 10$).

Question ouverte

Aire de figures composées

Question ouverte

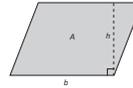
Une **figure composée** est constituée de diverses figures planes simples telles que les rectangles, les triangles, les parallélogrammes et les trapèzes.

- Construis au moins trois figures composées en tenant compte des restrictions suivantes :
 - chaque figure doit contenir au moins 1 parallélogramme ou 1 trapèze;
 - chaque figure doit être inscrite dans un rectangle mesurant 30 cm sur 20 cm;
 - l'aire totale de chaque figure doit être égale à 500 cm².
- Sur chacune des figures construites, indique les mesures des segments de droite des figures planes simples dont tu as besoin pour t'assurer que l'aire totale de la figure composée soit égale à 500 cm².
- Détermine, pour chaque figure composée, l'aire de chacune des figures planes simples qui la composent.

Fiche de rappel de formules

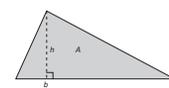
Aire d'un parallélogramme

$$A = bh$$



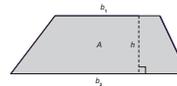
Aire d'un triangle

$$A = \frac{1}{2}bh$$



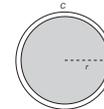
Aire d'un trapèze

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$



Circonférence d'un cercle

$$C = 2\pi r$$



Aire d'un cercle

$$A = \pi r^2$$



Fiche de réflexion

Aire de figures composées

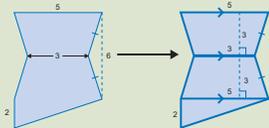
(Suite)

Fiche de réflexion

Une **figure composée** est constituée de diverses figures planes simples telles que les rectangles, les triangles, les parallélogrammes et les trapèzes.

On peut déterminer l'aire d'une figure composée en déterminant l'aire des figures planes simples qui la composent.

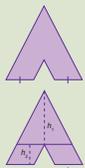
Par exemple, on peut déterminer l'aire de la figure de gauche ci-dessous en la décomposant d'abord en 2 trapèzes et 1 triangle.



Chaque trapèze a une hauteur de 3 unités ($6 \div 2$) et une aire de 12 unités carrées $[\frac{1}{2}(3 + 5) \times 3]$. Le triangle a une aire de 5 unités carrées $[\frac{1}{2}(2 \times 5)]$. Par conséquent, la figure composée a une aire de 29 unités carrées ($12 + 12 + 5$).

Il est important que les dimensions dont on a besoin pour déterminer l'aire des figures planes simples soient fournies ou que l'on dispose de suffisamment de données pour les déduire. Par exemple, pour déterminer l'aire de la figure composée ci-dessus, on a pu déduire que chaque trapèze avait une hauteur de 3 unités en s'appuyant sur les informations données.

On pourrait déterminer l'aire de la figure composée ci-dessous en connaissant seulement certaines de ses mesures.



On peut d'abord décomposer la figure en 1 triangle et 2 parallélogrammes congruents. Si l'on connaît la base b de l'un des parallélogrammes ainsi que les hauteurs h_1 et h_2 indiquées, on peut déterminer l'aire de la figure plane dans la mesure où l'on reconnaît que la base du triangle est égale au double de la base b .

$$A = bh_2 + bh_2 + \frac{1}{2}(2b \times h_1) \text{ ou}$$

$$A = 2bh_2 + bh_1$$

Aire de figures composées

(Suite)

Il est parfois plus facile de déterminer l'aire d'une figure composée en faisant la différence entre les aires de figures planes simples. Par exemple, pour déterminer l'aire de la figure bleue ci-dessous, il suffit de faire la différence entre l'aire du rectangle et les aires des 2 triangles. Ainsi, $A = bh - 2 \times \frac{1}{2}cd$.



1. Décris une façon de déterminer l'aire de la surface colorée à partir de l'aire de figures planes simples.

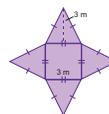
a)



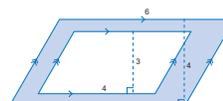
b)



c)

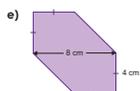


d)



Aire de figures composées

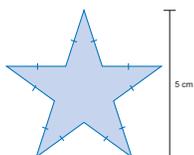
(Suite)



2. Détermine l'aire de chacune des surfaces colorées présentées à la question 1.

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

3. a) De quelle façon peux-tu décomposer l'étoile suivante en figures planes simples afin de faciliter le calcul de son aire?



b) Surligne les segments de droite dont tu dois connaître la mesure pour déterminer l'aire des différentes figures planes simples. Utilise ta règle pour obtenir ces mesures.

c) Détermine l'aire de l'étoile.

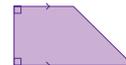
Aire de figures composées

(Suite)

4. a) Démontre que tout trapèze peut être décomposé en 3 triangles.

b) Quelles dimensions dois-tu connaître pour déterminer l'aire de chacun des 3 triangles? Explique ta réponse.

5. a) Si tu connais seulement la mesure de chacun des côtés d'un trapèze rectangle, peux-tu déterminer son aire sans avoir à effectuer d'autres mesures? Explique ta réponse.



b) Si tu connais seulement la mesure de chacun des côtés d'un trapèze non rectangle, peux-tu déterminer son aire sans avoir à effectuer d'autres mesures? Explique ta réponse.



6. a) Comment peux-tu décomposer l'hexagone régulier suivant en figures planes simples afin de déterminer son aire? Surligne le plus petit nombre possible de segments de droite que tu aurais besoin de mesurer avec une règle pour pouvoir ensuite déterminer l'aire de l'hexagone. Explique ta réponse.



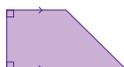
Aire de figures composées

(Suite)

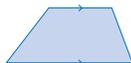
4. a) Démontre que tout trapèze peut être décomposé en 3 triangles.

b) Quelles dimensions dois-tu connaître pour déterminer l'aire de chacun des 3 triangles? Explique ta réponse.

5. a) Si tu connais seulement la mesure de chacun des côtés d'un trapèze rectangle, peux-tu déterminer son aire sans avoir à effectuer d'autres mesures? Explique ta réponse.



b) Si tu connais seulement la mesure de chacun des côtés d'un trapèze non rectangle, peux-tu déterminer son aire sans avoir à effectuer d'autres mesures? Explique ta réponse.



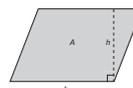
6. a) Comment peux-tu décomposer l'hexagone régulier suivant en figures planes simples afin de déterminer son aire? Surligne le plus petit nombre possible de segments de droite que tu aurais besoin de mesurer avec une règle pour pouvoir ensuite déterminer l'aire de l'hexagone. Explique ta réponse.



Fiche de rappel de formules

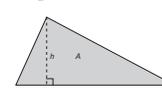
Aire d'un parallélogramme

$A = bh$



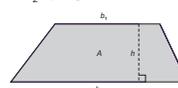
Aire d'un triangle

$A = \frac{1}{2}bh$



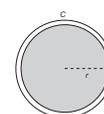
Aire d'un trapèze

$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$



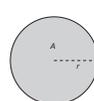
Circonférence d'un cercle

$C = 2\pi r$



Aire d'un cercle

$A = \pi r^2$



Circonférence et aire de cercles

Question ouverte

Note : Cette activité a pour objectif d'amener les élèves à développer les formules pour déterminer la circonférence et l'aire de cercles. On ne doit donc **pas** mettre à leur disposition l'annexe intitulée *Fiche de rappel de formules*.

Matériel

- règles
- calculatrices
- papier quadrillé
- ficelle, ciseaux
- compas (facultatif)
- annexe *Quatre cercles* (facultatif)

Questions à poser avant de présenter la question ouverte

Dessinez un carré.

- ◇ *Quelle est la relation entre le périmètre de ce carré et la mesure d'un côté? (Par exemple, le périmètre est égal à 4 fois la mesure d'un côté.) Pourquoi? (Par exemple, le carré est composé de 4 côtés égaux.)*

Dessinez un triangle équilatéral.

- ◇ *Quelle est la relation entre le périmètre de ce triangle équilatéral et la longueur d'un côté? (Par exemple, le périmètre est égal à 3 fois la mesure d'un côté.) Pourquoi? (Par exemple, le triangle équilatéral est composé de 3 côtés égaux.)*

Dessinez un cercle.

- ◇ *Comment peut-on mesurer le contour du cercle? (Par exemple, on peut placer une ficelle autour du cercle, puis la couper, la disposer en ligne droite et la mesurer à l'aide d'une règle.)*
- ◇ *Si le cercle était dessiné sur du papier quadrillé, comment pourrait-on déterminer son aire? (Par exemple, on pourrait tracer un rectangle au milieu du cercle pour calculer rapidement cette partie de l'aire, puis dénombrer les carrés entiers et partiels restants. Il faudrait cependant estimer l'aire de certaines parties du cercle.)*

Utilisation de la question ouverte

Les élèves tracent les 4 cercles à l'aide d'objets ayant une surface ronde ou en se servant d'un compas. Sinon, vous pouvez leur distribuer l'annexe intitulée *Quatre cercles*.

En observant ou en écoutant les élèves, notez si elles et ils :

- observent le rapport constant (π) entre la circonférence et le diamètre d'un cercle;
- observent le rapport constant (π) entre l'aire d'un cercle et l'aire d'un carré dont les côtés correspondent au rayon du cercle;
- peuvent représenter, à l'aide d'un dessin, la relation entre :
 - la circonférence et le diamètre d'un cercle;
 - l'aire d'un cercle et l'aire d'un carré dont les côtés correspondent au rayon du cercle.

Consolidation et objectivation

Exemples de questions à poser :

- ◇ *Que constatez-vous au sujet de la circonférence du cercle ayant le plus grand rayon? (Par exemple, sa circonférence est la plus grande.)*
- ◇ *Peut-on faire la même constatation pour l'aire? (Oui.)*
- ◇ *Qu'est-ce que les mesures des circonférences des 4 cercles ont en commun? (Par exemple, elles sont toutes légèrement supérieures à 3 fois le diamètre du cercle correspondant.)*

Expliquez aux élèves que le nombre pi (π) est le nombre utilisé pour décrire ce rapport entre la circonférence et le diamètre d'un cercle, et que ce nombre est égal à environ 3,14.

- ◇ *À quel autre moment avez-vous obtenu le nombre π ? (Par exemple, j'ai obtenu le nombre π en comparant l'aire du cercle à l'aire du carré dont les côtés correspondent au rayon du cercle.)*
- ◇ *En quoi vos dessins illustrent-ils les constatations que vous avez faites par rapport à la circonférence et à l'aire d'un cercle? (Par exemple, mon premier dessin montre qu'il me faudrait plus de 3 ficelles de la longueur du diamètre pour faire le tour complet du cercle, ce qui illustre le nombre π . Mon autre dessin montre que l'aire d'un carré tracé à partir du rayon du cercle est légèrement supérieure au quart de l'aire du cercle.)*

Note : Si les élèves ont réalisé des dessins différents de celui proposé comme solution à la page suivante, présentez-leur ce dernier et posez-leur les questions suivantes :

- En quoi ce dessin illustre-t-il le fait que la circonférence d'un cercle est quelque peu inférieure à 4 fois le diamètre du cercle?
- En quoi ce dessin illustre-t-il le fait que l'aire d'un cercle est quelque peu inférieure à 4 fois l'aire d'un carré dont les côtés correspondent au rayon du cercle?

(Pour un exemple de réponse à ces deux questions, voir la section « Solutions ».)

Solutions

Par exemple, j'ai dessiné des cercles dont les diamètres mesuraient respectivement 5 cm, 10 cm, 15 cm et 20 cm.

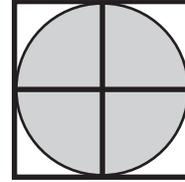
	Cercle 1	Cercle 2	Cercle 3	Cercle 4
Diamètre	5 cm	10 cm	15 cm	20 cm
Circonférence du cercle	15,5 cm	31 cm	47 cm	62 cm
Circonférence du cercle par rapport au diamètre	3,1 fois supérieure	3,1 fois supérieure	3,1 fois supérieure	3,1 fois supérieure
Estimation de l'aire du cercle	78 cm ²	310 cm ²	700 cm ²	1 250 cm ²
Aire du carré	25 cm ²	100 cm ²	225 cm ²	400 cm ²
Aire du cercle par rapport à l'aire du carré	3,1 fois supérieure	3,1 fois supérieure	3,1 fois supérieure	3,1 fois supérieure

D'après les données du tableau, je constate que :

1. la circonférence d'un cercle est égale à un peu plus de 3 fois le diamètre du cercle;
2. l'aire d'un cercle est égale à un peu plus de 3 fois l'aire du carré dont les côtés correspondent au rayon du cercle.

Pour illustrer la vraisemblance de ces constatations, j'ai dessiné un cercle inscrit dans un carré. Avec ce dessin, on voit que :

1. le périmètre du carré est égal à 4 fois le diamètre du cercle. De plus, puisque le contour du cercle ne « s'étend » pas tout à fait jusque dans les coins du carré, on voit que la circonférence est quelque peu inférieure au périmètre du carré ou, par le fait même, à 4 fois le diamètre du cercle, ce qui illustre la vraisemblance de ma première constatation.
2. l'aire du cercle est quelque peu inférieure à l'aire des 4 petits carrés dont les côtés correspondent au rayon du cercle, ce qui illustre la vraisemblance de ma deuxième constatation.



Fiche de réflexion

Matériel

- règles
- calculatrices
- ficelle, ciseaux
- annexes *Cercle divisé en secteurs* et *Fiche de rappel de formules*

Questions à poser avant de présenter la fiche de réflexion

Dessinez un carré.

- ◇ *Quelle est la relation entre le périmètre de ce carré et la mesure d'un côté? (Par exemple, le périmètre est égal à 4 fois la mesure d'un côté.) Pourquoi? (Par exemple, le carré est composé de 4 côtés égaux.)*

Dessinez un triangle équilatéral.

- ◇ *Quelle est la relation entre le périmètre de ce triangle équilatéral et la longueur d'un côté? (Par exemple, le périmètre est égal à 3 fois la mesure d'un côté.) Pourquoi? (Par exemple, le triangle équilatéral est composé de 3 côtés égaux.)*

Montrez aux élèves une copie de l'annexe intitulée *Cercle divisé en secteurs*.

- ◇ *Selon vous, quelle semble être la relation entre la circonférence de ce cercle et son diamètre? (Par exemple, la circonférence semble être environ 3 fois plus grande que le diamètre.)*

Utilisation de la fiche de réflexion

Lisez l'encadré avec les élèves et répondez, s'il y a lieu, à leurs questions.

Proposez-leur de couper une ficelle de la longueur de la circonférence d'un cercle afin de vérifier que cette longueur correspond à un peu plus de 3 fois le diamètre du cercle. Proposez-leur également de découper un cercle en 8 secteurs égaux et de les réorganiser de façon à créer une figure qui correspond presque à un parallélogramme.

Demandez-leur de répondre aux questions qui suivent l'encadré.

En observant ou en écoutant les élèves, notez si elles et ils :

- peuvent appliquer les formules pour déterminer la circonférence et l'aire de cercles;
- peuvent utiliser ces formules pour déterminer le rayon ou le diamètre d'un cercle de circonférence ou d'aire donnée;
- comprennent que si l'on double l'une des trois mesures linéaires d'un cercle (rayon, diamètre ou circonférence), alors les deux autres mesures linéaires sont elles aussi doublées, mais que ce n'est pas le cas pour l'aire du cercle;
- peuvent déterminer la circonférence ou l'aire d'une figure composée entre autres de cercles ou de parties de cercles;
- comprennent que l'aire d'un cercle croît rapidement au fur et à mesure que son rayon augmente;
- peuvent établir des liens entre les différentes formules qui font appel aux dimensions d'un cercle.

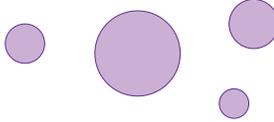
6. a) $100 + 2 \times (25\pi) = (100 + 50\pi) \text{ cm}^2$ (ou 257 cm^2)
 b) $400 - \frac{1}{4}(100\pi) = (400 - 25\pi) \text{ cm}^2$ (ou $321,5 \text{ cm}^2$)
 c) $(2\,500 + 625\pi) \text{ cm}^2$ (ou $4\,462,5 \text{ cm}^2$)
7. a) Il faut déterminer l'aire d'un quart de cercle ayant un rayon de 3 m. On obtient alors une aire de $\frac{9\pi}{4} \text{ m}^2$ (ou $7,1 \text{ m}^2$).
 b) Il faut soustraire l'aire du cercle ayant un rayon de 5 m de l'aire du carré. On obtient alors une aire de $(100 - 25\pi) \text{ m}^2$ (ou $21,5 \text{ m}^2$).
 c) Il faut additionner l'aire du demi-cercle ayant un rayon de 3 cm et l'aire du trapèze. On obtient alors une aire de $\left(\frac{9\pi}{2} + 30\right) \text{ cm}^2$ (ou $44,13 \text{ cm}^2$).
 d) Il faut soustraire l'aire du demi-cercle ayant un rayon de 5 m de l'aire du demi-cercle ayant un rayon de 7 m. On obtient alors $\left(\frac{1}{2} \times 49\pi - \frac{1}{2} \times 25\pi\right) \text{ cm}^2$ ou $12\pi \text{ cm}^2$ (ou $37,68 \text{ cm}^2$).
8. $\sqrt{80} \text{ cm}$ (ou $8,9 \text{ cm}$)
9. $\sqrt{\frac{10}{\pi}} \text{ cm}$ (ou $1,8 \text{ cm}$).
10. $(18 \times 6) - 12 \times (\pi \times 1,5^2) \text{ cm}^2$ ou $(108 - 27\pi) \text{ cm}^2$ (ou $23,22 \text{ cm}^2$)
11. $\sqrt{100\pi} \text{ cm}$ (ou $17,7 \text{ cm}$)
12. Par exemple, puisque 10 est environ égal à 3π , l'aire du cercle A doit mesurer environ $3\pi \text{ cm}^2$ de plus que l'aire du cercle B, c'est-à-dire que $\pi r_A^2 - \pi r_B^2 = 3\pi$. Il faut donc que la différence entre le carré du rayon du cercle A et le carré du rayon du cercle B soit environ égale à 3. Ainsi, le rayon du cercle A pourrait, par exemple, mesurer environ 2 cm et le rayon du cercle B pourrait mesurer environ 1 cm puisque $2^2 - 1^2 = 3$.
13. Par exemple, les formules pour déterminer le diamètre (d), la circonférence (C) et l'aire (A) d'un cercle dépendent uniquement de la valeur du rayon (r). Ainsi :
- si l'on connaît r , on sait que $d = 2r$, que $C = 2\pi r$ et que $A = \pi r^2$;
 - si l'on connaît d , on sait que $r = \frac{d}{2}$ et on peut remplacer r par $\frac{d}{2}$ dans les formules pour déterminer la circonférence et l'aire;
 - si l'on connaît C , on sait que $r = \frac{C}{2\pi}$ et on peut remplacer r par $\frac{C}{2\pi}$ dans les formules pour déterminer le diamètre et l'aire;
 - si l'on connaît A , on sait que $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ et on peut remplacer r par $\sqrt{\frac{A}{\pi}}$ dans les formules pour déterminer le diamètre et la circonférence.

Question ouverte

Circonférence et aire de cercles

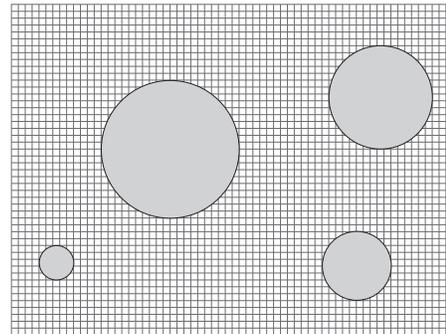
Question ouverte

Construis au moins 4 cercles de tailles différentes.



- Mesure la circonférence de chaque cercle. Compare cette mesure au diamètre du cercle.
- Estime l'aire de chaque cercle à l'aide de papier quadrillé. Compare cette aire à l'aire d'un carré dont les côtés correspondent au rayon du cercle.
- Décris tes constatations par rapport aux deux comparaisons ci-dessus, puis illustre la vraisemblance de ces constatations à l'aide de dessins. Explique le lien entre tes dessins et tes constatations.

Quatre cercles



Fiche de réflexion

Circonférence et aire de cercles

(Suite)

Fiche de réflexion

Il est plus difficile de mesurer le contour de cercles que de mesurer le contour de polygones, car il n'est pas possible d'utiliser une règle. Même l'utilisation d'un gallon à mesurer ne permet pas d'obtenir une mesure précise. C'est la raison pour laquelle les formules permettant de déterminer la circonférence et l'aire d'un cercle sont utiles.

Circonférence

La circonférence d'un cercle correspond à la mesure de son contour, c'est-à-dire à son périmètre. Une ficelle a été utilisée pour mesurer la circonférence de chacun des cercles ci-dessous. On peut constater que le rapport entre la circonférence et le diamètre (la largeur du cercle) est le même pour chaque cercle.



Estimation de la circonférence : 9,4 cm
Rapport : $\frac{9,4}{3} = 3,133$



Estimation de la circonférence : 15,7 cm
Rapport : $\frac{15,7}{5} = 3,14$



Estimation de la circonférence : 4,7 cm
Rapport : $\frac{4,7}{1,5} = 3,133$

Le rapport exact est exprimé par un nombre irrationnel appelé π (se prononce pi) dont la valeur approximative est 3,1415926...

Puisque π correspond au quotient de la circonférence (C) et du diamètre (d) d'un cercle, c'est-à-dire que $\pi = \frac{C}{d}$, on peut conclure que $C = \pi d$.

La figure ci-dessous représentant un cercle inscrit à l'intérieur d'un carré illustre la vraisemblance de ce rapport entre la circonférence et le diamètre d'un cercle. On voit que le périmètre du carré dont les côtés correspondent au diamètre du cercle est égal à 4 fois le diamètre. De plus, puisque le contour du cercle ne « s'étend » pas tout à fait jusque dans les coins du carré, on voit que la circonférence du cercle est inférieure au périmètre du carré et donc, inférieure à 4 fois le diamètre du cercle. Il est donc vraisemblable que la circonférence d'un cercle soit égale à un peu plus de 3 fois le diamètre du cercle.



Circonférence et aire de cercles

(Suite)

Le rayon (r) d'un cercle correspond à un segment de droite partant du centre du cercle et se terminant à un point quelconque sur sa circonférence. Le rayon est toujours égal à la moitié du diamètre.

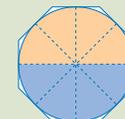


Puisque $C = \pi d$,
alors $C = \pi \times 2r$ ou $C = 2\pi r$

Aire

Le fait de connaître le rayon ou le diamètre d'un cercle nous permet de déterminer son aire.

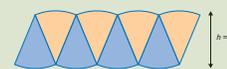
Pour déterminer l'aire d'un cercle quelconque, il est utile de l'inscrire dans un polygone. Par exemple, on pourrait inscrire le cercle dans un octogone et le diviser ensuite en 8 secteurs égaux comme suit.



On peut découper les 8 secteurs et les réorganiser de façon à créer une figure qui correspond presque à un parallélogramme. Si l'on avait inscrit le cercle dans un polygone ayant un plus grand nombre de côtés, les courbes au niveau des bases de la figure seraient moins prononcées et ressembleraient presque à des lignes droites.

La hauteur du « parallélogramme » correspond au rayon du cercle.

Chaque base du « parallélogramme » mesure la moitié de la circonférence du cercle étant donné que les deux bases constituent la circonférence complète. Or, puisque $C = 2\pi r$, alors $\frac{1}{2}C = \pi r$. Donc, la base est égale à πr .



Circonférence et aire de cercles

(Suite)

L'aire du « parallélogramme », et par conséquent l'aire du cercle, est égale au produit de la base et de la hauteur, soit $A = b \times h = \pi r \times r$ ou $A = \pi r^2$.

La figure ci-dessous peut nous aider à comprendre pourquoi il est vraisemblable que l'aire d'un cercle soit égale à un peu plus de 3 fois l'aire d'un carré dont les côtés correspondent au rayon du cercle. On voit en effet que l'aire du cercle est quelque peu inférieure à l'aire des 4 petits carrés ayant pour côté le rayon du cercle étant donné que le cercle ne recouvre pas les petites surfaces blanches.



Puisque $A = \pi r^2$, alors $r^2 = \frac{A}{\pi}$ ou $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$.

Ainsi, si l'on connaît l'aire d'un cercle, on peut utiliser la formule $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ pour déterminer la mesure de son rayon.

1. Détermine la circonférence de chaque cercle.

a)

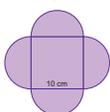


b)

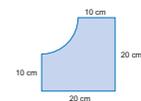


2. Détermine le périmètre de chaque figure.

a)



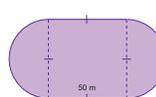
b)



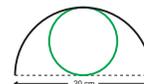
Circonférence et aire de cercles

(Suite)

c)



3. Une ficelle noire est utilisée pour délimiter le demi-cercle du schéma suivant et une ficelle verte est utilisée pour délimiter le cercle. Quelle est la relation entre les longueurs de ces deux ficelles? Comment le sais-tu?



4. Détermine la mesure du rayon d'un cercle ayant une circonférence de 20 cm.

5. Si le diamètre d'un cercle correspond au double du diamètre d'un autre cercle, quelle est la relation entre les circonférences? Explique ta réponse.

6. Détermine l'aire de chacune des figures présentées à la question 2.

a)

b)

c)

Circonférence et aire de cercles

(Suite)

7. Détermine l'aire de la surface ombrée de chacune des figures suivantes. Explique ta réponse.

a)



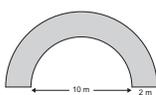
b)



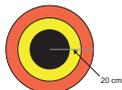
c)



d)



8. L'aire du cercle noir au centre de la cible correspond à $\frac{1}{5}$ de l'aire totale de la cible. Détermine la mesure du rayon du cercle noir.

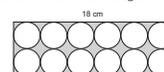


9. Détermine la mesure du rayon d'un cercle ayant une aire de 10 cm^2 .

Circonférence et aire de cercles

(Suite)

10. Détermine l'aire de la surface ombrée de la figure suivante.



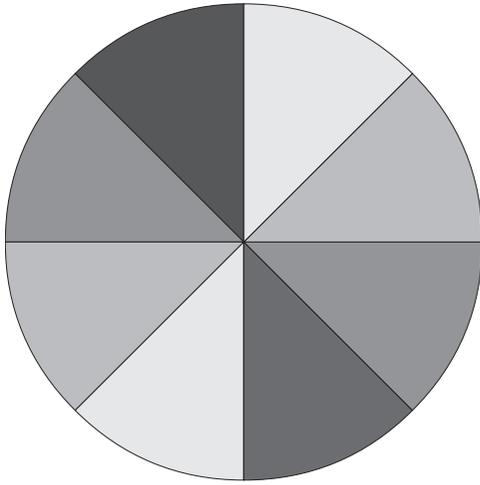
11. Un carré a la même aire qu'un cercle ayant un rayon de 10 cm. Quelle est la mesure de chacun des côtés du carré?



12. Si l'aire du cercle A mesure 10 cm^2 de plus que l'aire du cercle B, quelle est la relation entre les rayons? Justifie ta réponse.

13. Explique pourquoi il suffit de connaître soit le rayon, soit le diamètre, soit la circonférence, soit l'aire d'un cercle pour être en mesure de déterminer chacune des trois autres mesures?

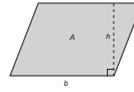
Cercle subdivisé en secteurs



Fiche de rappel de formules

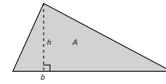
Aire d'un parallélogramme

$$A = bh$$



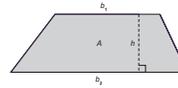
Aire d'un triangle

$$A = \frac{1}{2}bh$$



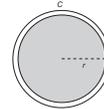
Aire d'un trapèze

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$



Circonférence d'un cercle

$$C = 2\pi r$$



Aire d'un cercle

$$A = \pi r^2$$



