RÉDUCTION DES ÉCARTS DE RENDEMENT

9e année

Module 9 : Aire et volume de solides

Guide pédagogique

Topic 9

Aire et volume de solides

CONTENUS D'APPRENTISSAGE

Exemples de contenus d'apprentissage qui font appel à l'aire et au volume de solides

MPM1D

Mesure et géométrie

- établir comment déterminer l'aire de prismes, de pyramides, de cylindres, de cônes et de sphères.
- déterminer, à l'aide ou non d'outils technologiques, l'aire de solides simples et composés, y compris les cas faisant appel aux valeurs exactes.
- décrire la relation entre le volume d'un cône et celui d'un cylindre, d'une part, et le volume d'une pyramide et celui d'un prisme droit, d'autre part.
- expliquer, à l'aide de matériel concret, la relation entre le volume d'une sphère, le volume du cylindre correspondant et le volume du cône correspondant.
- déterminer la dimension manquante d'un solide d'une aire ou d'un volume donné.
- décrire, à l'aide de matériel d'appui ou d'un tableur, l'effet sur l'aire et le volume de solides lorsque les dimensions sont doublées, triplées.
- résoudre des problèmes portant sur l'aire et le volume de solides simples et composés dans des situations tirées de la vie courante et dans des situations faisant appel aux valeurs exactes.
- examiner la vraisemblance des résultats obtenus en tenant compte du contexte et en ayant recours au calcul mental et à l'estimation.

MFM1P

Mesure et géométrie

- déterminer l'aire de prismes, de pyramides et de cylindres.
- résoudre des problèmes d'applications portant sur l'aire de prismes, de pyramides et de cylindres.
- établir comment déterminer le volume d'un prisme droit et d'un cylindre, sachant que le volume est égal au produit de l'aire de la base du solide par sa hauteur.
- déterminer le volume de solides simples et composés.
- résoudre des problèmes portant sur le volume de solides dans des situations tirées de la vie courante.
- examiner la vraisemblance des résultats obtenus en tenant compte du contexte et en ayant recours au calcul mental et à l'estimation.

ÉVALUATION DIAGNOSTIQUE

Matériel
- calculatrices
- annexe *Fiche de rappel de formules*

Remettre aux élèves une copie de l'évaluation diagnostique (voir Guide de l'élève) et leur accorder suffisamment de temps pour répondre aux questions. Si des élèves ont de la difficulté à comprendre le sens d'une question, n'hésitez pas à leur expliquer.

Corriger les évaluations et planifier les interventions pédagogiques en fonction de l'analyse des résultats obtenus.

Ce guide contient du matériel d'appui relatif :
- au volume de prismes;
- au volume de cylindres;
- à l'aire de prismes et de cylindres.

Il n'est pas nécessaire d'utiliser tout ce matériel. Le tableau suivant propose une façon de choisir le matériel d'appui en fonction des difficultés observées lors de l'analyse des résultats.

Résultats	Matériel d'appui suggéré
Les élèves éprouvent des difficultés avec les questions 1 à 3.	Utiliser la section « Volume de prismes ».
Les élèves éprouvent des difficultés avec les questions 4 à 6.	Utiliser la section « Volume de cylindres ».
Les élèves éprouvent des difficultés avec les questions 7 à 9.	Utiliser la section « Aire de prismes et de cylindres ».

Note : Des élèves peuvent éprouver des difficultés à traiter des problèmes relatifs à l'aire et au volume de prismes et de cylindres, notamment parce qu'elles et ils :
- ont de la difficulté à appliquer les formules relatives à l'aire des diverses figures planes qui peuvent constituer la base d'un prisme ou d'un cylindre;
- confondent la variable *h*, qui représente la hauteur d'un prisme, avec la variable *h* qui est utilisée dans le calcul de l'aire de la base du prisme;
- ne tiennent pas compte de toutes les faces d'un solide dans le calcul de son aire;
- confondent les concepts de volume et d'aire, ou ne savent pas auquel des deux une situation particulière fait appel;
- ont de la difficulté à déduire, à partir de certaines mesures données d'un solide, les mesures qui sont nécessaires pour déterminer son aire ou son volume (p. ex., difficulté à déterminer la mesure du quatrième côté d'un trapèze rectangle lorsque les mesures des trois autres côtés sont connues, à reconnaître que les hauteurs de toutes les faces latérales d'un prisme sont égales, ou à reconnaître que la longueur du rectangle correspondant à la face latérale d'un cylindre est égale à la circonférence de la base);
- ne savent pas appliquer les formules relatives à l'aire et au volume de prismes et de cylindres dans des situations complexes.

Solutions

1. a) Le premier prisme a un volume de 120 cm^3 ($3 \times 5 \times 8$).
Le second prisme a un volume de 105 cm^3 ($3,5 \times 4 \times 7,5$).
Le volume du premier prisme mesure 15 cm^3 de plus.

b) Le premier prisme a un volume de 270 cm^3 (30 × 9).
L'aire de la base trapézoïdale du second prisme est de 24 cm^2 $\left[\frac{1}{2} \times (5 + 3) \times 6\right]$. Ce prisme a donc un volume de 264 cm^3 (24 × 11).
Le volume du premier prisme mesure 6 cm^3 de plus.

c) L'aire de la base en forme de losange du premier prisme est de 18 cm^2 (6 × 3). Ce prisme a donc un volume de 144 cm^3 (18 × 8).
Puisque la hauteur de la base triangulaire du second prisme mesure 6 cm $\left(\sqrt{10^2 - 8^2}\right)$, l'aire de la base est de 24 cm^2 $\left(\frac{1}{2} \times 6 \times 8\right)$. Ce prisme a donc un volume de 144 cm^3 (24 × 6).
Les deux prismes ont le même volume.

2. Par exemple, j'ai choisi deux prismes ayant une hauteur de 10 cm et un volume de 200 cm^3. L'un a une base rectangulaire dont la hauteur mesure 4 cm et la base mesure 5 cm. L'autre a une base en forme de parallélogramme dont la hauteur mesure 4 cm et la base mesure 5 cm.

3. L'aire de la base est égale à 25 cm^2.

4. a) L'aire de la base du premier cylindre est de 25π cm^2 ($\pi \times 5^2$). Ce cylindre a donc un volume de 250π cm^3 (25π × 10).
L'aire de la base du second cylindre est de 100π cm^2 ($\pi \times 10^2$). Ce cylindre a donc un volume de 500π cm^3 (100π × 5).
Le volume du second cylindre mesure 250π cm^3 de plus (ou environ 785 cm^3).

b) L'aire de la base du premier cylindre est de 25π cm^2 ($\pi \times 5^2$). Ce cylindre a donc un volume de 200π cm^3 (25π × 8).
L'aire de la base du second cylindre est de 36π cm^2 ($\pi \times 6^2$). Ce cylindre a donc un volume de 216π cm^3 (36π × 6).
Le volume du second cylindre mesure 16π cm^3 de plus (ou environ 50,24 cm^3).

c) Puisque le rayon du premier cylindre mesure 15 cm (30π ÷ 2π), l'aire de la base est de 225π cm^2 ($\pi \times 15^2$). Ce cylindre a donc un volume de 1 575π cm^3 (225π × 7).
L'aire de la base du second cylindre est de 100π cm^2 ($\pi \times 10^2$). Ce cylindre a donc un volume de 1 600π cm^3 (100π × 16).
Le volume du second cylindre mesure 25π cm^3 de plus (ou environ 78,5 cm^3).

5. Le petit cylindre a un volume de 250π cm^3 et le grand cylindre a un volume de 1 000π cm^3. Le volume du solide est donc de 1 250π cm^3 (ou environ 3 925 cm^3).

6. Non puisque, par exemple, on obtient le volume d'un cylindre en multipliant l'aire de sa base par sa hauteur. On obtient donc l'aire de la base d'un cylindre en divisant son volume par sa hauteur. Ainsi, si les deux cylindres ont le même volume et la même hauteur, les bases ont la même aire.

7. a) 1 cm **b)** 6 cm $\left(\sqrt{10^2 - 8^2}\right)$ **c)** 72 cm^2

8. $\sqrt{50}$ cm ou environ 7,1 cm

9. a) Le premier solide a une aire de 276 cm^2 (2 × 28 + 2 × 40 + 2 × 70).
Le deuxième solide a une aire de 210 cm^2 (4 × 40 + 2 × 25).
L'aire du premier solide mesure 66 cm^2 de plus.

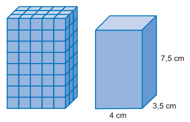
b) L'aire de la base triangulaire du prisme est de 80 cm^2 $\left(\frac{1}{2} \times 8 \times 20\right)$. Les trois faces rectangulaires ont respectivement une aire de 400 cm^2, de 160 cm^2 et de 430,8 cm^2 (puisque l'hypoténuse du triangle rectangle mesure 21,54 cm). Le prisme a donc une aire de 1 150,8 cm^2.
Le cylindre a une aire de 320π cm^2 (2 × 100π + 120π) ou environ 1 004,8 cm^2.
L'aire du prisme mesure environ 146 cm^2 de plus.

Évaluation diagnostique

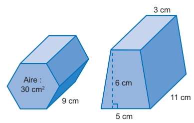
Note : Pour toute réponse faisant appel au nombre π, tu peux donner la valeur exacte exprimée en termes de π ou une valeur approximative calculée en fonction de la valeur de π arrondie à 3,14.

1. Quel prisme a le plus grand volume? De combien est-il plus grand? Montre ton travail.

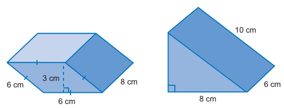
a)



b)



c)



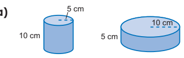
2. Donne un exemple de deux prismes qui ont le même volume, mais qui ont des bases de formes différentes.

3. Le volume d'un prisme est de 100 cm³ et sa hauteur est de 4 cm. Quelle autre mesure du prisme peut-on déduire de ces données?

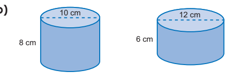
Évaluation diagnostique (*Suite*)

4. Quel cylindre a le plus grand volume? De combien de cm³ est-il plus grand? Montre ton travail.

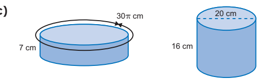
a)



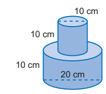
b)



c)



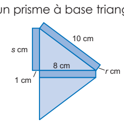
5. Quel est le volume de ce solide?



6. Deux cylindres ont la même hauteur et le même volume. Est-il possible que les bases aient des aires différentes? Explique ta réponse.

Évaluation diagnostique (*Suite*)

7. Voici le développement d'un prisme à base triangulaire.



a) Quelle est la valeur de *r*?

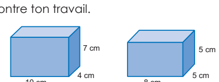
b) Quelle est la valeur de *s*?

c) Quelle est l'aire du prisme, c'est-à-dire l'aire totale de toutes ses faces?

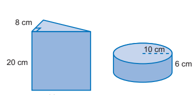
8. L'aire d'un cube est égale à 300 cm². Détermine la mesure de ses côtés au dixième près.

9. Quel solide a la plus grande aire? De combien de cm² est-elle plus grande? Montre ton travail.

a)



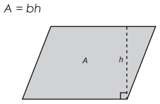
b)



Fiche de rappel de formules

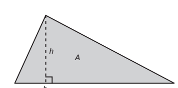
Aire d'un parallélogramme

$A = bh$



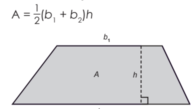
Aire d'un triangle

$A = \frac{1}{2}bh$ ou $A = \frac{bh}{2}$



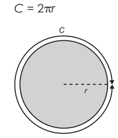
Aire d'un trapèze

$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$



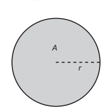
Circonférence d'un cercle

$C = 2\pi r$



Aire d'un cercle

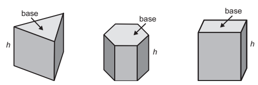
$A = \pi r^2$



Fiche de rappel de formules (*Suite*)

Volume d'un prisme

$V = A_{base} \times h$ où A_{base} représente l'aire de la base et h la hauteur du prisme.

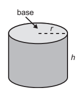


Volume d'un cylindre

$V = A_{base} \times h$ où A_{base} représente l'aire de la base et h la hauteur du cylindre.

OU

$V = \pi r^2 h$ où r représente le rayon de la base et h la hauteur du cylindre.

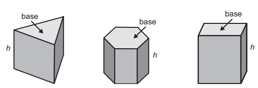


Aire d'un prisme (aire totale de ses faces)

$A = 2 \times A_{base}$ + aire des faces latérales où A_{base} représente l'aire de la base du prisme.

OU

$A = 2 \times A_{base} + P_{base} \times h$ où A_{base} et P_{base} représentent respectivement l'aire et le périmètre de la base, et h la hauteur du prisme.



Fiche de rappel de formules (*Suite*)

Aire d'un cylindre (aire totale de ses faces)

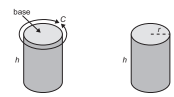
$A = 2 \times A_{base} + C_{base} \times h$ où A_{base} et C_{base} représentent respectivement l'aire et la circonférence de la base, et h la hauteur du cylindre.

OU

$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ où r représente le rayon de la base et h la hauteur du cylindre.

OU

$A = 2\pi r(r + h)$ où r représente le rayon de la base et h la hauteur du cylindre.



MATÉRIEL D'APPUI

L'objectif du matériel d'appui est d'aider les élèves à développer les habiletés de base pour traiter l'aire et le volume de solides simples, notamment les prismes et les cylindres, ainsi que de solides composés.

Chaque section du matériel d'appui comprend deux approches : l'approche par question ouverte (tâche unique) et l'approche par fiche de réflexion (tâches multiples). Les deux portent sur les mêmes contenus d'apprentissage; elles représentent des façons différentes d'interagir avec les élèves et de les mobiliser. Vous pouvez choisir une seule approche ou alterner entre les deux, dans l'ordre de votre choix.

Des interventions vous sont proposées pour faciliter l'apprentissage avant, pendant et après l'utilisation de l'approche de votre choix. Elles sont présentées en trois parties comme suit :
- Questions à poser avant de présenter la question ouverte ou la fiche de réflexion;
- Utilisation de la question ouverte ou de la fiche de réflexion;
- Consolidation et objectivation.

Volume de prismes

Question ouverte

Matériel
- annexe *Fiche de rappel de formules*
- calculatrices
- environ 40 cubes emboîtables

Questions à poser avant de présenter la question ouverte

◊ *Que représente le volume d'une figure?* (Par exemple, il représente la grosseur de la figure.) *Que voulez-vous dire par « grosseur »?* (Par exemple, c'est la place que la figure occupe dans l'espace si l'on tient compte de toutes ses dimensions.)

Construisez avec des cubes emboîtables, un prisme à base rectangulaire ayant seulement 1 étage composé de 4 rangées de 3 cubes chacune.
◊ *Quel est le volume de ce prisme?* (12 cubes) *Si chaque côté d'un cube mesure 1 cm, quel est le volume du prisme?* (12 cm^3)

À l'aide d'autres cubes emboîtables, ajoutez deux étages identiques au prisme rectangulaire.
◊ *Quel est le volume de ce nouveau prisme?* (36 cubes) *Quelle est la relation entre ce volume et le volume du prisme précédent?* (Par exemple, ce volume est égal à 3 fois le volume du prisme précédent.)
◊ *Cette relation semble-t-elle logique?* (Oui puisque, par exemple, ce prisme comprend 3 étages plutôt qu'un seul; il est donc composé de 3 fois plus de cubes.)
◊ *Un prisme rectangulaire qui n'est pas composé de cubes a une base mesurant 1,5 cm sur 6 cm et une hauteur de 4 cm. Comment pourriez-vous déterminer son volume?* (Par exemple, je peux déterminer l'aire de la base rectangulaire, soit 9 cm^2, en multipliant 1,5 par 6. Ensuite, en considérant que le prisme donné est composé de 4 prismes superposés ayant chacun une hauteur de 1 cm et un volume de 9 cm^3, je peux conclure que le volume du prisme donné est égal à 4 fois ce volume, soit à 36 cm^3.)
◊ *De quels autres types de prismes pourriez-vous déterminer le volume?* (Par exemple, les prismes à base triangulaire, à base hexagonale ou à base octogonale.)
◊ *Comment savez-vous quelle face correspond à la base d'un prisme?* (Par exemple, la base correspond à la face qui donne son nom au prisme, comme le triangle pour le prisme à base triangulaire ou l'hexagone pour le prisme à base hexagonale.)
◊ *Pourquoi l'expression $V = A_{base} \times h$ constitue-t-elle la formule pour déterminer le volume d'un prisme?* (Par exemple, parce qu'on peut considérer que le prisme est composé de h prismes superposés ayant chacun une hauteur de 1 unité. Le volume en unités cubes de chacun de ces prismes superposés correspond à l'aire de la base × 1. On peut alors conclure que le volume du prisme est donné par la formule $V = [A_{base} \times 1] \times h$ ou $V = A_{base} \times h$.)

Utilisation de la question ouverte

Assurez-vous que les élèves comprennent que pour chacun des volumes choisis, elles et ils doivent créer 3 prismes ayant des bases de formes différentes et des hauteurs différentes.

En observant ou en écoutant les élèves, notez si elles et ils :
- peuvent déterminer l'aire de la base de différents types de prismes;
- peuvent appliquer la formule $V = A_{base} \times h$ pour différents types de prismes;
- peuvent créer des prismes rectangulaires ayant un volume donné;
- peuvent résoudre des problèmes relatifs au volume de prismes et comprenant plusieurs étapes;
- peuvent établir une relation entre les volumes de certains prismes;
- comprennent que les dimensions d'un prisme peuvent correspondre à des nombres autres que des nombres naturels.

Consolidation et objectivation

Exemples de questions à poser :

◊ *Quel volume avez-vous choisi en premier?* (Par exemple, 1 000 cm^3.)

◊ *Quelle dimension du prisme avez-vous choisie en premier? Pourquoi?* (Par exemple, j'ai d'abord choisi la hauteur parce que je savais qu'en divisant le volume par la hauteur, j'obtiendrais la mesure de l'aire de la base. J'ai toujours choisi comme valeur pour la hauteur, un nombre correspondant à un diviseur entier du volume.)

◊ *Une fois que vous avez déterminé l'aire de la base, comment avez-vous déterminé les dimensions de cette base dans le cas d'un prisme à base rectangulaire?* (Par exemple, j'ai choisi 2 nombres dont le produit correspondait à l'aire de la base. Ainsi, pour une base de 100 cm^2, j'ai choisi les dimensions 10 cm sur 10 cm.)

◊ *Et si la base avait été triangulaire?* (Par exemple, puisque l'aire d'un triangle est donnée par la formule $A = \frac{1}{2}bh$, alors le produit de la base et de la hauteur doit être égal au double de l'aire. Ainsi, pour un prisme dont la base a une aire de 50 cm^2, je choisirais pour les dimensions du triangle, 2 nombres dont le produit être égal à 100.)

◊ *Et si la base avait été en forme d'hexagone équilatéral?* (Par exemple, puisqu'un hexagone est composé de 6 petits triangles, je diviserais l'aire de la base du prisme par 6 pour déterminer l'aire de l'un de ces petits triangles. Ensuite, je choisirais 2 nombres dont le produit est égal au double de ce résultat. Je choisirais un de ces nombres comme mesure de la base du triangle; il correspondrait alors à la mesure des côtés de l'hexagone.)

◊ *En quoi votre démarche pour toutes vos réponses était-elle basée sur le même concept?* (Par exemple, chaque fois, la démarche était basée sur le fait que le volume d'un prisme est égal au produit de sa hauteur par l'aire de sa base.)

Solutions

a) Par exemple, on constate que le prisme est composé de 16 cubes. En supposant que les côtés de ces cubes mesurent 1 cm, on a alors un volume de 16 cm^3.

b) Par exemple, on peut imaginer que le prisme est composé de 2 étages de cubes dont les côtés mesurent 1 cm, et que chaque étage est composé de 3 rangées de 5 cubes chacun. Ainsi, le volume de chaque étage est de 15 cubes (ou 15 cm^3) et le volume du prisme est de 30 cubes (ou 30 cm^3).

c) Par exemple, puisque le prisme triangulaire correspond à la moitié du prisme rectangulaire de la question b), son volume est donc égal à la moitié de 30 cm^3, soit 15 cm^3.

Par exemple, j'ai d'abord choisi un volume de 1 000 cm^3.

- Comme premier prisme, j'ai choisi un cube. Puisque 10^3 = 1 000, chacun de ses côtés devait mesurer 10 cm.
- Comme deuxième prisme, j'ai choisi un prisme à base triangulaire ayant une hauteur de 20 cm. Puisque l'aire de la base devait être égale à 50 cm^2 (1 000 ÷ 20), j'ai créé un triangle ayant une base de 10 cm et une hauteur de 10 cm.
- Comme troisième prisme, j'ai choisi un prisme ayant une base en forme de trapèze et une hauteur de 25 cm. Puisque l'aire de la base devait être égale à 40 cm^2 (1 000 ÷ 25), j'ai créé un trapèze ayant une hauteur de 10 cm et des bases de 2 cm et de 6 cm.

J'ai ensuite choisi un volume de 240 cm^3.

- Comme premier prisme, j'ai choisi un prisme ayant une base en forme de parallélogramme et une hauteur de 10 cm. Puisque l'aire de la base devait être égale à 24 cm^2 (240 ÷ 10), j'ai créé un parallélogramme ayant une hauteur de 4 cm et une base de 6 cm.
- Comme deuxième prisme, j'ai choisi un prisme ayant base hexagonale et une hauteur de 5 cm. Puisque l'aire de la base devait être égale à 48 cm^2 (240 ÷ 5), j'ai créé un hexagone composé de deux trapèzes égaux ayant chacun une aire de 24 cm^2. Puis, pour chaque trapèze, j'ai choisi une hauteur de 3 cm et des bases de 6 cm et 10 cm.
- Comme troisième prisme, j'ai choisi un prisme ayant une base pentagonale en forme de maison et une hauteur de 3 cm. Puisque l'aire de la base devait être égale à 80 cm^2 (240 ÷ 3), j'ai créé un pentagone composé d'un carré de 8 cm de côté et d'un triangle ayant une base de 8 cm et une hauteur 4 cm.

Fiche de réflexion

Matériel
- annexe *Fiche de rappel de formules*
- calculatrices
- environ 40 cubes emboîtables

Questions à poser avant de présenter la fiche de réflexion

◊ *Que représente le volume d'une figure?* (Par exemple, il représente la grosseur de la figure.) *Que voulez-vous dire par « grosseur »?* (Par exemple, c'est la grandeur de l'espace que la figure occupe si l'on tient compte de toutes ses dimensions.)

Construisez avec des cubes emboîtables, un prisme à base rectangulaire ayant seulement 1 étage composé de 4 rangées de 3 cubes chacune.

◊ *Quel est le volume de ce prisme?* (12 cubes) *Si chaque côté d'un cube emboîtable mesure 1 cm, quel est le volume du prisme?* (12 cm^3)

À l'aide d'autres cubes emboîtables, ajoutez deux étages identiques au prisme rectangulaire.

◊ *Quel est le volume de ce nouveau prisme?* (36 cubes) *Quelle est la relation entre ce volume et le volume du prisme précédent?* (Par exemple, ce volume est égal à 3 fois le volume du prisme précédent.)

◊ *Cette relation semble-t-elle logique?* (Oui puisque, par exemple, ce prisme comprend 3 étages plutôt qu'un seul; il est donc composé de 3 fois plus de cubes.)

◊ *Un prisme rectangulaire qui n'est pas composé de cubes a une base mesurant 1,5 cm sur 6 cm et une hauteur de 4 cm. Comment pourriez-vous déterminer son volume?* (Par exemple, je peux déterminer l'aire de la base rectangulaire, soit 9 cm^2, en multipliant 1,5 par 6. Ensuite, en considérant que le prisme donné est composé de 4 prismes superposés ayant chacun une hauteur de 1 cm et un volume de 9 cm^3, je peux conclure que le volume du prisme donné est égal à 4 fois ce volume, soit à 36 cm^3.)

◊ *De quels autres types de prismes pourriez-vous déterminer le volume?* (Par exemple, les prismes à base triangulaire, à base hexagonale ou à base octogonale.)

◊ *Comment savez-vous quelle face correspond à la base d'un prisme?* (Par exemple, la base correspond à la face qui donne son nom au prisme, comme le triangle pour le prisme à base triangulaire ou l'hexagone pour le prisme à base hexagonale.)

◊ *Pourquoi serait-il logique de multiplier l'aire de la base d'un prisme par la hauteur pour déterminer le volume du prisme?* (Par exemple, parce que l'aire de la base détermine l'espace requis par cette surface plane. Plus on superpose de ces surfaces planes, plus on a « d'étages » et donc, plus le volume du prisme est grand.)

Utilisation de la fiche de réflexion

Lisez l'encadré avec les élèves et, s'il y a lieu, répondez à leurs questions.

Distribuez aux élèves une copie de l'annexe intitulée *Fiche de rappel de formules.* Demandez-leur de répondre aux questions qui suivent l'encadré et suggérez-leur d'utiliser une calculatrice au besoin.

En observant ou en écoutant les élèves, notez si elles et ils :
- peuvent déterminer l'aire de la base de différents types de prismes;
- peuvent appliquer la formule $V = A_{base} \times h$ pour différents types de prismes;
- peuvent créer des prismes rectangulaires ayant un volume donné;
- peuvent résoudre des problèmes relatifs au volume de prismes et comprenant plusieurs étapes;
- peuvent établir une relation entre les volumes de certains prismes;
- comprennent que les dimensions d'un prisme peuvent correspondre à des nombres autres que des nombres naturels.

Consolidation et objectivation

Exemples de questions à poser :

◊ *Pourquoi est-il important de savoir calculer l'aire de divers polygones lorsqu'on cherche à déterminer le volume de prismes?* (Par exemple, parce que la formule permettant de déterminer le volume d'un prisme comprend l'aire de la base, et cette base est un polygone.)

◊ *À la question 3, comment avez-vous procédé pour avoir des prismes différents tout en conservant un même volume?* (Par exemple, j'ai déterminé différentes paires de nombres dont le produit est 60 et j'ai utilisé ces nombres comme mesures de la hauteur du prisme et de l'aire de sa base. Par exemple, puisque 2 × 30 = 60, j'ai dessiné un prisme de 2 cm de hauteur et j'ai fait en sorte que l'aire de la base mesure 30 cm^2. De même, puisque 6 × 10 = 60, j'ai dessiné un prisme de 10 cm de hauteur et j'ai fait en sorte que l'aire de la base mesure 6 cm^2.)

◊ *À la question 5, vous attendiez-vous à une réponse de cet ordre de grandeur?* (Par exemple, non, car j'avais l'impression que le creux en forme de cube occupait une plus grande partie du grand cube.)

◊ *À la question 6 a), comment avez-vous procédé pour déterminer l'aire de la base?* (Par exemple, j'ai constaté que la base était composée de 6 triangles identiques et que chaque triangle avait une base de 12,6 cm et une hauteur de 10,8 cm. J'ai donc déterminé l'aire d'un triangle, puis j'ai multiplié le résultat par 6 pour obtenir l'aire de la base.)

◊ *Si l'on vous donne le volume d'un prisme, comment pouvez-vous déterminer rapidement les dimensions d'un prisme à base rectangulaire ayant ce volume?* (Par exemple, je peux choisir une valeur quelconque pour la hauteur du prisme, puis diviser le volume du prisme par cette valeur pour obtenir l'aire de la base rectangulaire. Je peux ensuite choisir deux nombres dont le produit correspond à l'aire de la base et les utiliser comme dimensions de la base.)

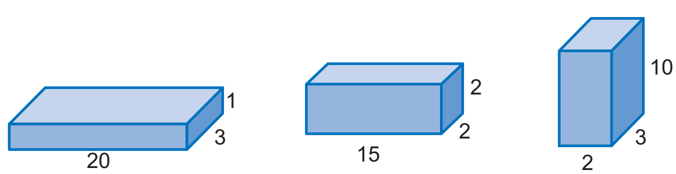
◊ *Qu'est-ce qui changerait s'il s'agissait d'un autre type de prisme?* (Par exemple, je peux toujours choisir une valeur quelconque pour la hauteur du prisme, puis diviser le volume du prisme par cette valeur pour obtenir l'aire de la base. Cependant, la façon de déterminer les dimensions de la base changerait selon la forme de la base.)

Solutions

1. **a)** 9 cm^2 (ou 24 cm^2) **b)** 50 cm^2 (ou 20 cm^2 ou 40 cm^2)
c) 1,95 cm^2 (ou 0,65 cm^2 ou 0,75 cm^2)

2. **a)** 72 cm^3 **b)** 200 cm^3 **c)** 0,975 cm^3

3. Exemples :



4. Par exemple, une largeur et une hauteur de 1 cm, et une longueur de 50 cm.

5. 448 cm^3 ($8^3 - 4^3$)

6. **a)** La base hexagonale est composée de 6 triangles ayant chacun une aire de 68,04 cm^2 $\left(\frac{1}{2} \times 10{,}8 \times 12{,}6\right)$. L'aire de la base mesure donc 408,24 cm^2 (6 × 68,04).

b) Je décompose la base pentagonale en 1 carré et 1 triangle équilatéral. L'aire du carré mesure 36 cm². À l'aide du théorème de Pythagore, je détermine que la hauteur du triangle mesure 5,2 cm $\left(\sqrt{6^2 - 3^2}\right)$. L'aire du triangle mesure donc 15,6 cm² $\left(\frac{1}{2} \times 6 \times 5{,}2\right)$. Alors, l'aire de la base mesure 51,6 cm² (36 + 15,6).

c) L'aire de la base mesure 35 cm² $\left[\frac{1}{2} \times (6 + 8) \times 5\right]$.

d) La base du prisme est un triangle rectangle qui a une hauteur de 6 cm et une hypoténuse de 10 cm. La base du triangle mesure donc 8 cm $\left(\sqrt{10^2 - 6^2}\right)$. L'aire de la base mesure alors 24 cm² $\left(\frac{1}{2} \times 8 \times 6\right)$.

e) La base hexagonale est composée de 6 triangles ayant chacun une aire de 43,3 cm² $\left(\frac{1}{2} \times 10 \times 8{,}66\right)$. L'aire de la base mesure donc 259,8 cm² (6 × 43,3).

7. a) 3 265,9 cm³ (408,24 × 8)
   b) 412,8 cm³ (51,6 × 8)
   c) 350 cm³ (35 × 10)
   d) 120 cm³ (24 × 5)
   e) 1 299 cm³ (259,8 × 5)

8. a) Le volume du prisme créé est égal à 2 fois le volume du prisme initial.
   b) Le volume du prisme créé est égal à 4 fois le volume du prisme initial.
   c) Le volume du prisme créé est égal à 2 fois le volume du prisme initial.

9. Par exemple, le prisme à base triangulaire pourrait avoir une hauteur de 5 cm et le triangle qui forme sa base pourrait avoir une hauteur de 16 cm et une base de 3 cm.

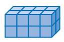
10. Je ne suis pas d'accord parce que, par exemple, pour une hauteur de 2 cm, de 4 cm ou de 4,5 cm, on obtient respectivement un volume de 40 cm³, de 80 cm³ et de 90 cm³.

Question ouverte

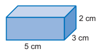
Volume de prismes

Question ouverte

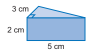
- Explique de quelle façon on a pu obtenir le volume de chacun des prismes suivants.

a) 

V = 16 cm³

b) 

V = 30 cm³

c) 

V = 15 cm³

- Choisis un volume.

- Crée un ensemble de trois prismes, chacun ayant ce volume, mais ayant des bases de formes différentes et des hauteurs différentes. Explique ta démarche.

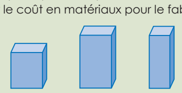
- Répète l'activité précédente en utilisant un autre volume et d'autres types de solides.

Fiche de réflexion

Volume de prismes (*Suite*)

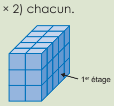
Fiche de réflexion

Le **volume** d'un solide est une mesure qui indique la grandeur de l'espace occupé par ce solide. On peut, par exemple, vouloir connaître le volume d'un solide afin de déterminer le coût en matériaux pour le fabriquer.



Plus grand volume

- Parmi les 3 prismes ci-dessus, celui du milieu a le plus grand volume. Il a un volume supérieur au prisme de gauche puisqu'il est plus haut, alors que les 2 prismes ont la même base. Il a aussi un volume supérieur au prisme de droite puisqu'il a une plus grande base, alors que les 2 prismes ont la même hauteur.
- On peut mesurer le volume d'un prisme à base rectangulaire en déterminant le nombre de cubes de 1 cm³ qu'il faudrait pour le construire. Par exemple, le prisme ci-dessous a un volume de 30 cubes (ou 30 cm³), puisqu'il est composé de 3 étages de 10 cubes (5 × 2) chacun.

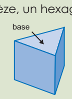


Si le prisme était plus haut, il aurait un plus grand volume. Par exemple, si le cube était composé de 6 étages au lieu de 3, il aurait alors un volume de 60 cubes (6 × 10).

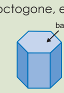
La formule pour déterminer le volume (V) d'un prisme à base rectangulaire de hauteur h est :

$$V = (\textit{Aire de la base}) \times \textit{hauteur} \text{ ou } V = A_{base} \times h.$$

- Il est important de se rappeler que la base d'un prisme est la face qui est utilisée pour nommer le prisme. Ainsi, la base peut être un carré, un rectangle, un triangle, un trapèze, un hexagone, un octogone, etc.



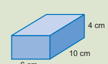
prisme à base triangulaire



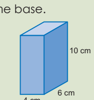
prisme à base hexagonale

Volume de prismes (*Suite*)

- Dans le cas de prismes à base rectangulaire, n'importe quelle face peut être utilisée comme base. Par exemple, le prisme ci-dessous a un volume de 240 cm³, peu importe la face qui est utilisée comme base.



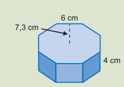
V = 60 cm² × 4 cm = 240 cm³



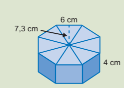
V = 24 cm² × 10 cm = 240 cm³

- Tous les prismes occupent un espace dont la grandeur dépend de l'aire de leur base, ainsi que de leur hauteur. La formule $V = A_{base} \times h$ permet donc de déterminer le volume de n'importe quel prisme.

  Prenons, par exemple, le prisme ci-contre dont la base est un octogone régulier (tous les côtés de l'octogone sont égaux). On note que les côtés de cette base mesurent 6 cm, que la distance entre le centre de la base et le milieu d'un côté mesure 7,3 cm, et que la hauteur du prisme mesure 4 cm.



  Pour déterminer l'aire de la base du prisme, soit l'aire de l'octogone, on peut d'abord subdiviser la base en 8 triangles équilatéraux. Puisque chaque triangle a une base de 6 cm et une hauteur de 7,3 cm, l'aire de chacun est de 21,9 cm² $\left(\frac{1}{2} \times 6 \times 7{,}3\right)$.



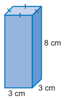
  L'aire de la base du prisme mesure donc 175,2 cm² (8 × 21,9). On peut alors déterminer que le volume du prisme est égal à 700,8 cm³ (175,2 × 4).

Note : Dans la formule pour déterminer le volume d'un prisme, h représente la hauteur du prisme. Il ne faut pas confondre cette hauteur avec la hauteur, par exemple, des triangles équilatéraux qui forment la base octogonale du prisme ci-dessus.

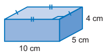
Volume de prismes *(Suite)*

1. Détermine l'aire de la base de chacun des prismes.

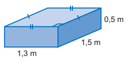
a)



b)



c)



2. Détermine le volume de chaque prisme de la question 1.

a)

b)

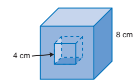
c)

3. Dessine 3 prismes à base rectangulaire différents ayant chacun un volume de 60 cm³. Indique les dimensions de chaque prisme (longueur, largeur et hauteur).

Volume de prismes *(Suite)*

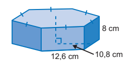
4. Les mesures de la largeur et de la hauteur d'un prisme à base rectangulaire sont beaucoup plus petites que la mesure de la longueur. Si le prisme a un volume de 50 cm³, quelles pourraient être ses dimensions?

5. Les côtés d'un cube mesurent 8 cm. Sur la face avant du cube, il y a un creux en forme de cube dont les côtés mesurent 4 cm. Quel est le volume de ce solide?

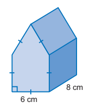


6. Détermine l'aire de la base de chacun des prismes. Montre ton travail.

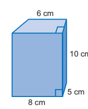
a)



b)

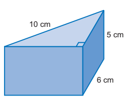


c)

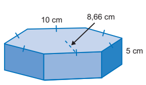


Volume de prismes *(Suite)*

d)



e)



7. Détermine le volume de chaque prisme de la question 6.

a)

b)

c)

d)

e)

8. Dans chacun des cas suivants, on décrit comment on modifie quelque peu le prisme donné à la question 6 c) pour créer un nouveau prisme. Compare le volume de chaque nouveau prisme au volume du prisme initial.

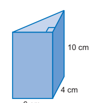
a) On conserve la base du prisme, mais on double sa hauteur.

b) On conserve la hauteur du prisme, mais on double la mesure de chacun des côtés de sa base.

c) On réduit de moitié la hauteur du prisme et on double la mesure de chacun des côtés de sa base.

Volume de prismes *(Suite)*

9. Un prisme à base triangulaire a le même volume que le prisme ci-dessous, mais ses dimensions sont différentes. Indique quelles pourraient être ses dimensions.



10. Jacob dit que si l'aire de la base d'un prisme est de 20 cm², son volume pourrait être de 40 cm³ ou de 80 cm³, mais pas de 90 cm³. Es-tu d'accord avec cette affirmation? Justifie ta réponse.

Volume de cylindres

Question ouverte

Matériel
- annexe *Fiche de rappel de formules*
- calculatrices
- 4 cylindres : 2 de même hauteur, mais de rayons différents; 2 de même rayon, mais de hauteurs différentes

Questions à poser avant de présenter la question ouverte

Montrez aux élèves deux cylindres de même hauteur, mais de rayons différents.
◊ *Selon vous, lequel de ces deux cylindres a le plus grand volume? Pourquoi?* (Par exemple, celui qui a la plus grande base parce qu'il est plus gros.) *En quoi le fait d'avoir une plus grande base influe-t-il sur le volume?* (Par exemple, plus la base est grande, plus le cylindre occupe de l'espace.)

Montrez aux élèves deux cylindres de même rayon, mais de hauteurs différentes.
◊ *Selon vous, lequel de ces deux cylindres a le plus grand volume? Pourquoi?* (Par exemple, celui qui est le plus haut, parce qu'il a la même forme que l'autre cylindre, mais il est plus grand.)
◊ *Pourquoi semble-t-il logique que la formule pour déterminer le volume d'un cylindre comprenne les mesures de la base et de la hauteur du cylindre?* (Par exemple, parce que ces deux mesures ont un impact sur la grandeur de l'espace occupé par le cylindre.)
◊ *Comment détermine-t-on l'aire de la base d'un cylindre?* (Par exemple, à l'aide de la formule $A = \pi r^2$.)

Distribuez aux élèves l'annexe intitulée *Fiche de rappel de formules*.
◊ *Pourquoi les deux formules pour déterminer le volume d'un cylindre, inscrites sur cette fiche, semblent-elles logiques?* (Par exemple, parce que les deux formules comprennent les mesures de la base et de la hauteur du cylindre.)

Utilisation de la question ouverte

Assurez-vous que les élèves comprennent qu'elles et ils doivent choisir trois volumes différents, et déterminer pour chacun les dimensions possibles d'un cylindre et d'un prisme à base rectangulaire ayant ce volume. Incitez-les à utiliser une calculatrice au besoin.

En observant ou en écoutant les élèves, notez si elles et ils peuvent :
- déterminer l'aire de la base d'un cylindre;
- déterminer le volume de cylindres à l'aide de la formule $V = A_{base} \times h$ ou $V = \pi r^2 h$;
- déterminer le volume de prismes à base rectangulaire;
- déterminer les dimensions possibles d'un cylindre ayant un volume donné;
- prévoir l'incidence sur le volume d'un cylindre de tout changement dans la mesure de son rayon (r) ou de sa hauteur (h).

Consolidation et objectivation
Exemples de questions à poser : ◊ *De façon générale, quelle dimension du cylindre avez-vous choisie en premier? Pourquoi?* (Par exemple, j'ai d'abord choisi la hauteur du cylindre parce que je n'avais plus qu'à diviser le volume par cette hauteur pour obtenir l'aire de la base.) ◊ *Pourquoi avez-vous alors eu besoin d'une racine carrée pour déterminer le rayon de la base du cylindre?* (Par exemple, parce que l'aire de la base du cylindre est égale à πr^2 et, pour isoler r, on doit utiliser la racine carrée.) ◊ *Si vous aviez d'abord choisi de donner une valeur au rayon du cylindre, comment auriez-vous déterminé la hauteur?* (Par exemple, j'aurais divisé le volume par la valeur de πr^2.) ◊ *Avez-vous choisi un volume ayant une valeur exacte exprimée en termes de π?* (Par exemple, oui, j'ai choisi un volume de 20π cm³.) ◊ *Comment avez-vous alors fait pour déterminer les dimensions d'un prisme à base rectangulaire qui a ce volume?* (Par exemple, j'ai déterminé la valeur approximative du volume en multipliant 20 par la valeur de π arrondie à 3,14. J'ai ensuite choisi une hauteur et j'ai obtenu l'aire de la base du prisme en divisant le volume par cette hauteur. Enfin, j'ai choisi une autre mesure pour la largeur de la base du prisme et j'ai divisé l'aire de la base par cette largeur pour obtenir la longueur de la base.) ◊ *La tâche aurait-elle été plus facile si vous aviez choisi au départ un volume correspondant à un nombre naturel?* (Oui car, par exemple, je n'aurais pas eu besoin de déterminer la valeur approximative du volume en utilisant la valeur de π arrondie à 3,14.)

Solutions

Note : Pour toute réponse faisant appel au nombre π, on donne la valeur exacte exprimée en termes de π et une valeur approximative calculée en fonction de la valeur de π arrondie à 3,14.

- Premier volume : 20π cm³

  Puisque le cylindre est haut, j'ai choisi une hauteur de 20 cm. L'aire de la base (πr^2) doit donc mesurer π cm² et son rayon doit mesurer 1 cm.

  Pour le prisme à base rectangulaire, j'ai choisi une hauteur de 10 cm. L'aire de la base doit donc mesurer 2π cm². L'un des côtés de la base pourrait alors mesurer 2 cm et l'autre, π cm (ou 3,14 cm).

- Deuxième volume : 400 cm³

  Pour le prisme à base rectangulaire, j'ai choisi une hauteur de 20 cm. L'aire de la base doit donc mesurer 20 cm². L'un des côtés de la base pourrait alors mesurer 4 cm et l'autre, 5 cm.

  Pour le cylindre, j'ai choisi une hauteur de 40 cm. L'aire de la base (πr^2) doit donc mesurer 10 cm². Alors, $r^2 = \frac{10}{\pi}$ et $r = \sqrt{\frac{10}{\pi}}$ cm (ou 1,8 cm).

- Troisième volume : 500 cm³

  Pour le prisme à base rectangulaire, j'ai choisi une hauteur de 10 cm. L'aire de la base doit donc mesurer 50 cm². L'un des côtés de la base pourrait alors mesurer 10 cm et l'autre, 5 cm.

  Pour le cylindre, j'ai choisi une hauteur de 25 cm. L'aire de la base (πr^2) doit donc mesurer 20 cm². Alors, $r^2 = \frac{20}{\pi}$ et r = $\sqrt{\frac{20}{\pi}}$ cm (ou 2,5 cm).

Fiche de réflexion

Matériel
- annexe *Fiche de rappel de formules*
- calculatrices
- 4 cylindres : 2 de même hauteur, mais de rayons différents; 2 de même rayon, mais de hauteurs différentes

Questions à poser avant de présenter la fiche de réflexion

Montrez aux élèves deux cylindres de même hauteur, mais de rayons différents.

◊ *Selon vous, lequel de ces deux cylindres a le plus grand volume? Pourquoi?* (Par exemple, celui qui a la plus grande base parce qu'il est plus gros.) *En quoi le fait d'avoir une plus grande base influe-t-il sur le volume?* (Par exemple, plus la base est grande, plus le cylindre occupe de l'espace.)

Montrez aux élèves deux cylindres de même rayon, mais de hauteurs différentes.

◊ *Selon vous, lequel de ces deux cylindres a le plus grand volume? Pourquoi?* (Par exemple, celui qui est le plus haut, parce qu'il a la même forme que l'autre cylindre, mais il est plus grand.)

◊ *Pourquoi semble-t-il logique que la formule pour déterminer le volume d'un cylindre comprenne les mesures de la base et de la hauteur du cylindre?* (Par exemple, parce que ces deux mesures ont un impact sur la grandeur de l'espace occupé par le cylindre.)

◊ *Comment détermine-t-on l'aire de la base d'un cylindre?* (Par exemple, à l'aide de la formule $A = \pi r^2$.)

Utilisation de la fiche de réflexion

Lisez l'encadré avec les élèves et, s'il y a lieu, répondez à leurs questions.

Distribuez aux élèves une copie de l'annexe intitulée *Fiche de rappel de formules.* Demandez-leur de répondre aux questions qui suivent l'encadré et suggérez-leur d'utiliser une calculatrice au besoin.

En observant ou en écoutant les élèves, notez si elles et ils peuvent :
- déterminer l'aire de la base d'un cylindre;
- déterminer le volume de cylindres à l'aide de la formule $V = A_{base} \times h$ ou $V = \pi r^2 h$;
- reconnaître l'incidence sur le volume d'un cylindre de tout changement dans la mesure de son rayon (r) ou de sa hauteur (h).
- déterminer les dimensions possibles d'un cylindre ayant un volume donné;
- résoudre des problèmes relatifs au volume de cylindres et comprenant plusieurs étapes;
- établir un lien entre le volume d'un cylindre et celui d'un prisme correspondant ou d'un autre cylindre.

Consolidation et objectivation

Exemples de questions à poser :

◊ *À la question 3, comment avez-vous procédé pour choisir différents cylindres de même volume?* (Par exemple, j'ai déterminé diverses paires de nombres dont le produit est égal à 300. Ainsi, puisque 3 × 100 est égal à 300, j'ai choisi un cylindre ayant une hauteur de 3 cm et un rayon de 10 cm. Ou encore, puisque 12 × 25 est aussi égal à 300, j'ai choisi un cylindre ayant une hauteur de 12 cm et un rayon de 5 cm.)

◊ *À la question 3, pourquoi avez-vous eu besoin d'une racine carrée pour déterminer le rayon, dans le cas où vous avez d'abord choisi une valeur pour la hauteur?* (Par exemple, parce que j'ai divisé le volume par la hauteur pour obtenir l'aire de la base. Or, l'aire de la base est égale à πr^2 et, pour isoler r, on doit utiliser la racine carrée.)

◊ *À la question 6, comment saviez-vous que les mesures intérieures de la base de la boîte devaient être égales au diamètre du cylindre?* (Par exemple, parce que si elles étaient plus petites que le diamètre du cylindre, le cylindre ne pourrait pas être inséré dans la boîte. De plus, comme on cherche à déterminer le volume intérieur de la plus petite boîte possible, il ne doit pas y avoir d'espace entre le cylindre et les côtés de la boîte.)

◊ *À la question 8, comment avez-vous procédé pour déterminer les dimensions d'un cylindre ayant un volume de 64 cm³ alors que l'aire de la base d'un cylindre comprend le nombre π?* (Par exemple, j'ai choisi une hauteur et j'ai divisé le volume par cette hauteur pour obtenir l'aire de la base. Ensuite, en divisant l'aire par 3,14, j'ai obtenu un nombre correspondant au carré du rayon. J'ai enfin déterminé la mesure du rayon en extrayant la racine carrée de ce nombre.)

◊ *Pourquoi est-il vraisemblable que le prisme à la question 9 soit moins haut que le cylindre?* (Par exemple, parce que l'aire de la base du cylindre est inférieure à l'aire de la base du prisme. Puisque les deux solides ont le même volume, la hauteur du cylindre doit donc être supérieure à la hauteur du prisme.)

Solutions

Note : Pour toute réponse faisant appel au nombre π, on donne la valeur exacte exprimée en termes de π et une valeur approximative calculée en fonction de la valeur de π arrondie à 3,14.

1. **a)** 250π cm³ (ou 785 cm³) **b)** 250π cm³ (ou 785 cm³)

c) $\frac{800}{\pi}$ cm³ (ou 254,8 cm³) **d)** $176{,}4\pi$ cm³ (ou 553,9 cm³)

2. Par exemple, les deux cylindres ont la même hauteur, mais le cylindre à la question 1d) a un rayon plus petit que le cylindre à la question 1a); donc, son volume est nécessairement plus petit.

3. Par exemple, les cylindres pourraient avoir :
- une hauteur de 10 cm et un rayon de $\sqrt{30}$ cm (ou environ 5,48 cm);
- une hauteur de 15 cm et un rayon de $\sqrt{20}$ cm (ou environ 4,47 cm);
- une hauteur de 5 cm et un rayon de $\sqrt{60}$ cm (ou environ 7,75 cm).

4. La partie inférieure du pain est un prisme à base rectangulaire dont le volume mesure 1 320 cm³ (6 × 20 × 11). La partie supérieure du pain correspond à la moitié d'un cylindre d'une hauteur de 20 cm et d'un rayon de 5,5 cm. Puisque ce cylindre aurait un volume de 605π cm³ ($\pi \times 5{,}5^2 \times 20$), alors la moitié du cylindre a un volume de $302{,}5\pi$ cm³ ou de 949,85 cm³. Le pain a donc un volume de 2 269,85 cm³ (1 320 + 949, 85).

5. Si le tuyau n'avait pas d'espace vide à l'intérieur, son volume serait de 4 800π cm^3 ($\pi \times 4^2 \times 300$). Comme le volume de l'espace vide mesure 1 875π cm^3 ($\pi \times 2{,}5^2 \times 300$), le volume de matériau nécessaire pour fabriquer le tuyau doit donc être égal à 2 925π cm^3 (4 800π – 1 875π) ou à 9 184,5 cm^3.

6. 80 000 cm^3 ($40 \times 40 \times 50$)

7. Non car, par exemple, la première forme cylindrique a un volume de $\frac{3\,509}{\pi}$ cm^3 $\left[\pi \times \left(\frac{11}{\pi}\right)^2 \times 29\right]$ alors que la deuxième a un volume de $\frac{4\,625{,}5}{\pi}$ cm^3 $\left[\pi \times \left(\frac{14{,}5}{\pi}\right)^2 \times 22\right]$.

8. Chacun des côtés du cube doit mesurer 4 cm. Le cylindre pourrait avoir une hauteur de 8 cm et une base dont l'aire mesure 8 cm^2. On a donc $\pi r^2 = 8$, d'où $r = 1{,}6$ cm.

9. Par exemple, le cylindre est plus haut que le prisme; sa hauteur est égale à environ 1,3 fois la hauteur du prisme.

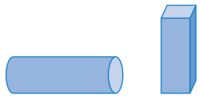
10. Non car, par exemple, le cylindre A pourrait être moins haut que le cylindre B, mais beaucoup plus large.

Question ouverte

Volume de cylindres

Question ouverte

Un très haut cylindre a le même volume qu'un prisme à base rectangulaire.



- Choisis trois volumes possibles. Pour chacun, décris les dimensions d'un cylindre et d'un prisme à base rectangulaire ayant ce même volume. Explique ta démarche.

Note : Pour toute réponse faisant appel au nombre π, tu peux donner la valeur exacte exprimée en termes de π ou une valeur approximative calculée en fonction de la valeur de π arrondie à 3,14.

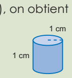
Fiche de réflexion

Volume de cylindres (*Suite*)

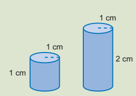
Fiche de réflexion

Un cylindre ressemble beaucoup à un prisme, sauf que sa base a la forme d'un cercle. Il est donc logique que l'on puisse déterminer le volume d'un cylindre de la même façon que l'on détermine le volume d'un prisme, c'est-à-dire en multipliant l'aire de la base par la hauteur.

Prenons, par exemple, un cylindre qui a une hauteur de 1 cm et un rayon de 1 cm. L'aire de sa base est alors égale à π cm² ($\pi \times 1^2$). En multipliant l'aire de la base (π cm²) par la hauteur (1 cm), on obtient le volume du cylindre, soit π cm³.



Si le cylindre était deux fois plus haut, cela reviendrait à empiler deux des cylindres précédents l'un sur l'autre. Le volume du cylindre ainsi obtenu serait donc le double du volume initial.

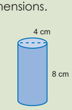


La formule pour déterminer le volume (V) d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est :

$$V = A_{base} \times h \text{ ou } V = \pi r^2 h.$$

On constate que pour déterminer le volume d'un cylindre, on doit connaître deux valeurs, soit les valeurs de r et de h. Cependant, il est parfois possible de déterminer le volume d'un cylindre si l'on connaît certaines autres dimensions.

Par exemple, si l'on connaît la hauteur et le diamètre (d) d'un cylindre, on peut diviser le diamètre par 2 pour obtenir le rayon, puis appliquer la formule pour déterminer le volume.



Puisque $d = 4$ cm, alors $r = 2$ cm.
Donc $V = 32\pi$ cm³ ($\pi \times 2^2 \times 8$) ou 100,48 cm³.

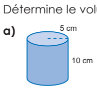
Si l'on connaît la hauteur et la circonférence (C) d'un cylindre, il est possible aussi de déterminer son volume. Il suffit d'abord d'utiliser la formule $C = 2\pi r$ pour déterminer le rayon. Par exemple, si $C = 30$ cm, alors $r = \frac{15}{\pi}$ cm ou 4,78 cm. On peut ensuite déterminer le volume en appliquant la formule $V = \pi r^2 h$.

Volume de cylindres (*Suite*)

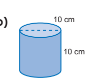
Note : Pour toute réponse faisant appel au nombre π, tu peux donner la valeur exacte exprimée en termes de π ou une valeur approximative calculée en fonction de la valeur de π arrondie à 3,14.

1. Détermine le volume de chacun des cylindres.

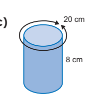
a)



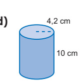
b)



c)



d)

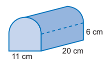


2. Pourquoi est-il vraisemblable que le volume du cylindre à la question 1d) soit inférieur au volume du cylindre à la question 1a)?

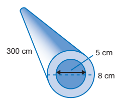
3. Les volumes de trois cylindres différents mesurent chacun 300π cm³ (ou 942 cm³). Quelles pourraient être leurs dimensions?

Volume de cylindres (*Suite*)

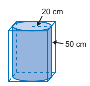
4. La partie supérieure de chaque extrémité du pain ci-dessous a la forme d'un demi-cercle. Détermine le volume du pain. Montre ton travail.



5. Un tuyau mesurant 300 cm de long a un diamètre extérieur de 8 cm et un diamètre intérieur de 5 cm. Quel volume de matériau faut-il pour le fabriquer? Montre ton travail.



6. Détermine le volume intérieur de la plus petite boîte en forme de prisme à base carrée dans laquelle on peut insérer le cylindre ci-dessous.



Volume de cylindres (*Suite*)

7. Une feuille de papier mesure 22 cm sur 29 cm. Tu enroules la feuille dans le sens de la longueur de façon à obtenir une forme cylindrique, ouverte à chaque extrémité. Puis, tu enroules dans le sens de la largeur une autre feuille de papier ayant ces mêmes dimensions, de façon à obtenir une forme cylindrique moins haute que la précédente. Ces deux formes cylindriques ont-elles le même volume intérieur? Justifie ta réponse.

8. Un cube et un cylindre ont chacun un volume de 64 cm^3. Quelles pourraient être les dimensions de chaque solide?

9. La mesure du diamètre d'un cylindre est égale à la mesure des côtés de la base carrée d'un prisme. Si ces deux solides ont le même volume, quelle est la relation entre leur hauteur?

10. Le volume du cylindre A est le double du volume du cylindre B. Le cylindre A est-il nécessairement plus haut que le cylindre B? Justifie ta réponse.

Aire de prismes et de cylindres

Question ouverte

Matériel
- annexe *Fiche de rappel de formules*
- calculatrices
- prisme à base rectangulaire
- prisme à base triangulaire
- cylindres
- autres solides (facultatif)

Questions à poser avant de présenter la question ouverte

Montrez aux élèves un prisme à base rectangulaire.
◊ *Si vous deviez découper du papier d'emballage pour couvrir chacune des faces de ce prisme, de quels renseignements auriez-vous besoin?* (Par exemple, j'aurais besoin de connaître l'aire de chacune des faces du prisme.)
◊ *Quelles dimensions du prisme devez-vous connaître pour déterminer l'aire de chacune de ses faces?* (Par exemple, je dois connaître sa hauteur, sa largeur et sa profondeur.)

Montrez aux élèves un prisme à base triangulaire.
◊ *Et si vous deviez couvrir ce prisme, de quels renseignements auriez-vous besoin?* (Par exemple, j'aurais besoin de connaître l'aire de chacune des 3 faces rectangulaires et des 2 faces triangulaires.)
◊ *Comment détermineriez-vous ces aires?* (Par exemple, pour les rectangles, je multiplierais la mesure de la base de chaque rectangle par la mesure de sa hauteur. Pour les triangles, je multiplierais la mesure de la base de chaque triangle par la mesure de sa hauteur, puis je diviserais ce produit par 2.)
◊ *Si la base du prisme avait la forme d'un triangle rectangle, et si vous connaissiez la mesure de l'hypoténuse ainsi que la mesure de l'un des deux autres côtés du triangle, comment pourriez-vous déterminer la mesure du troisième côté?* (Par exemple, en utilisant le théorème de Pythagore.)

Montrez aux élèves un cylindre.
◊ *L'aire de quelle face du cylindre serait la plus difficile à déterminer?* (Par exemple, la face courbe correspondant à la hauteur du cylindre.)
Note : Indiquez aux élèves que cette face est appelée la **face latérale** du cylindre.
◊ *Si l'on enlevait les faces circulaires à chaque extrémité du cylindre, que l'on découpait la face latérale dans le sens de sa hauteur et que l'on ouvrait cette surface, quelle figure plane aurait-on?* (Un rectangle.) *À quoi correspondent les dimensions de ce rectangle?* (La longueur du rectangle correspond à la hauteur du cylindre et sa largeur correspond à la circonférence du cylindre.)

Distribuez aux élèves l'annexe intitulée *Fiche de rappel de formules* et demandez-leur d'examiner les formules pour déterminer l'aire d'un prisme et l'aire d'un cylindre.
◊ *En quoi la première formule pour déterminer l'aire d'un prisme vous paraît-elle logique?* (Par exemple, la formule tient compte du fait que les deux bases ont la même aire, et du fait que le nombre de faces rectangulaires qui composent le prisme varie en fonction du type de prisme.)
◊ *En quoi la formule pour déterminer l'aire d'un cylindre vous paraît-elle logique?* (Par exemple, la formule tient compte de l'aire des deux extrémités du cylindre ainsi que de l'aire de sa face latérale.)

Utilisation de la question ouverte
Vous pouvez mettre à la disposition des élèves divers prismes et cylindres afin qu'elles et ils puissent les examiner. En observant ou en écoutant les élèves, notez si elles et ils : • peuvent déterminer l'aire de diverses figures planes; • tiennent compte de toutes les faces d'un solide dans le calcul de son aire; • facilitent le calcul de l'aire d'un solide en tenant compte du fait que certaines des faces ont la même aire; • réalisent que pour déterminer l'aire d'un prisme, il est nécessaire de connaître la mesure de chacun des côtés de sa base; • comprennent que la face latérale d'un cylindre correspond à une surface plane rectangulaire dont la longueur et la largeur sont respectivement égales à la hauteur et à la circonférence du cylindre; • peuvent modifier les dimensions d'un solide de manière à en créer un autre de même aire.
Consolidation et objectivation
Exemples de questions à poser : ◊ *Pourquoi avez-vous choisi cette aire en particulier?* (Par exemple, parce que j'ai pensé que le prisme à base carrée pourrait être un cube. En le créant avec des côtés de 10 cm, l'aire de chacune des 6 faces mesure alors 100 cm^2, ce qui donne une aire totale de 600 cm^2.) ◊ *Une fois que vous avez choisi cette aire, comment avez-vous fait pour créer un prisme à base trapézoïdale qui avait la même aire?* (Par exemple, j'ai d'abord décidé que la base du prisme serait un trapèze isocèle, puis j'ai choisi les mesures des 2 bases et de la hauteur de ce trapèze. Je pouvais alors déterminer l'aire des 2 faces trapézoïdales, et j'ai soustrait cette aire de 600 pour déterminer l'aire des 4 faces rectangulaires du prisme. En déterminant ensuite la mesure des 2 côtés égaux du trapèze à l'aide du théorème de Pythagore, j'avais alors la mesure de chacun des côtés de la base. Puisque la somme des produits de chacune de ces mesures par la hauteur h du prisme devait être égale à l'aire des 4 faces rectangulaires, il m'a suffi de déterminer la valeur de h qui rendait cette égalité vraie.) ◊ *À part le cube, quel solide avez-vous pu créer assez facilement?* (Par exemple, le cylindre puisque j'ai choisi sa hauteur, puis j'ai déterminé la valeur de r à l'aide de la formule $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.) ◊ *Dans le cas des prismes, pourquoi vous fallait-il connaître la mesure de chacun de côtés de leur base?* (Par exemple, parce que les prismes sont composés, entre autres, de faces rectangulaires dont la largeur correspond à la mesure de l'un des côtés de la base.)

Solutions

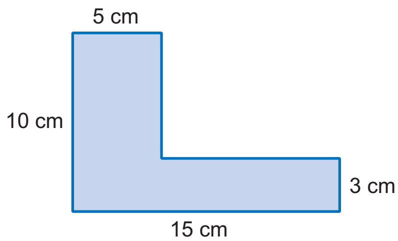
Par exemple, j'ai choisi 600 cm^2.

1. Pour le prisme à base carrée, j'ai choisi un cube ayant des côtés de 10 cm.

2. Pour le prisme à base rectangulaire, j'ai choisi une base dont les dimensions sont 4 cm sur 25 cm. Puisque l'aire totale des 2 bases est égale à 200 cm^2, l'aire totale des 4 autres faces rectangulaires doit être égale à 400 cm^2. Si h est la hauteur du prisme, alors $(2 \times 4h) + (2 \times 25h) = 400$. Donc, $h = 6{,}9$ cm.

3. Pour le prisme à base trapézoïdale, j'ai choisi comme base un trapèze rectangle ayant des bases de 5 cm et 7 cm et une hauteur de 6 cm. Le quatrième côté du trapèze mesure donc $\sqrt{40}$ cm $\left(\sqrt{2^2 + 6^2}\right)$ ou environ 6,3 cm. Puisque l'aire totale des 2 bases mesure 72 cm^2, l'aire totale des 4 côtés rectangulaires mesure 528 cm^2. Si h est la hauteur du prisme, alors $5h + 6h + 7h + 6{,}3h = 528$. Donc, $h = 21{,}7$ cm.

4. Pour mon 4^e prisme, j'ai choisi la base hexagonale suivante.



Puisque l'aire totale des 2 bases est égale à 160 cm^2 et que le périmètre de la base est égal à 50 cm, alors $160 + 50h = 600$. Donc $h = 8{,}8$ cm.

5. Pour le cylindre, j'ai choisi un rayon de 5 cm. L'aire totale des 2 bases est donc égale à 50π cm^2 et l'aire de la face latérale est égale à $10\pi h$ cm^2. Ainsi, $50\pi + 10\pi h = 600$, ce qui signifie que $31{,}4h = 443$. Donc, $h = 14{,}1$ cm.

Fiche de réflexion

Matériel
- règles
- calculatrices
- ficelles et ciseaux
- annexe *Fiche de rappel de formules*

Questions à poser avant de présenter la fiche de réflexion

Montrez aux élèves un prisme à base rectangulaire.
◊ *Si vous deviez découper du papier d'emballage pour couvrir chacune des faces de ce prisme, de quels renseignements auriez-vous besoin?* (Par exemple, j'aurais besoin de connaître l'aire de chacune des faces du prisme.)
◊ *Quelles dimensions du prisme devez-vous connaître pour déterminer l'aire de chacune de ses faces?* (Par exemple, je dois connaître sa hauteur, sa largeur et sa profondeur.)

Montrez aux élèves un prisme à base triangulaire.
◊ *Et si vous deviez couvrir ce prisme, de quels renseignements auriez-vous besoin?* (Par exemple, j'aurais besoin de connaître l'aire de chacune des 3 faces rectangulaires et des 2 faces triangulaires.)
◊ *Comment détermineriez-vous ces aires?* (Par exemple, pour les rectangles, je multiplierais la mesure de la base de chaque rectangle par la mesure de sa hauteur. Pour les triangles, je multiplierais la mesure de la base de chaque triangle par la mesure de sa hauteur, puis je diviserais ce produit par 2.)
◊ *Si la base du prisme avait la forme d'un triangle rectangle, et si vous connaissiez la mesure de l'hypoténuse ainsi que la mesure de l'un des deux autres côtés du triangle, comment pourriez-vous déterminer la mesure du troisième côté?* (Par exemple, en utilisant le théorème de Pythagore.)

Montrez aux élèves un cylindre.
◊ *L'aire de quelle face du cylindre serait la plus difficile à déterminer?* (Par exemple, la face courbe correspondant à la hauteur du cylindre.)
Note : Indiquez aux élèves que cette face est appelée la **face latérale** du cylindre.
◊ *Si l'on enlevait les faces circulaires à chaque extrémité du cylindre, que l'on découpait la face latérale dans le sens de sa hauteur et que l'on ouvrait cette surface, quelle figure plane aurait-on?* (Un rectangle.) *À quoi correspondent les dimensions de ce rectangle?* (La longueur du rectangle correspond à la hauteur du cylindre et sa largeur correspond à la circonférence du cylindre.)

Utilisation de la fiche de réflexion

Lisez l'encadré avec les élèves et répondez, s'il y a lieu, à leurs questions.

Demandez-leur de répondre aux questions qui suivent l'encadré.

En observant ou en écoutant les élèves, notez si elles et ils :
- peuvent déterminer l'aire de diverses figures planes;
- tiennent compte de toutes les faces d'un solide dans le calcul de son aire;
- facilitent le calcul de l'aire d'un solide en tenant compte du fait que certaines des faces ont la même aire;
- réalisent que pour déterminer l'aire d'un prisme, il est nécessaire de connaître la mesure de chacun des côtés de sa base;
- comprennent que la face latérale d'un cylindre correspond à une surface plane rectangulaire dont la longueur et la largeur sont respectivement égales à la hauteur et à la circonférence du cylindre;
- comprennent qu'une des dimensions d'un prisme (ou d'un cylindre) peut être supérieure à la dimension correspondante d'un autre prisme (ou cylindre), même si son aire est plus petite;
- peuvent résoudre des problèmes relatifs à l'aire de prismes et de cylindres, et comprenant plusieurs étapes;
- reconnaissent ce qui fait qu'un solide donné a une grande aire.

Consolidation et objectivation

Exemples de questions à poser :
◊ *Pourquoi tous les prismes et tous les cylindres ont-ils au moins deux faces de même aire?* (Par exemple, parce que leurs 2 bases parallèles ont toujours la même aire.)
◊ *Pourquoi devez-vous effectuer plus de calculs pour déterminer l'aire de certains prismes par rapport à d'autres, même s'ils ont le même nombre de faces?* (Par exemple, parce que si certains côtés de la base du prisme sont égaux, les aires des faces liées à ces côtés sont égales; il suffit donc de déterminer une seule de ces aires, puis de la multiplier par le nombre de côtés égaux.)
◊ *Dans le cas des prismes, pourquoi vous fallait-il connaître la mesure de chacun de côtés de leur base?* (Par exemple, parce que les prismes sont composés, entre autres, de faces rectangulaires dont la largeur correspond à la mesure de l'un des côtés de la base.)
◊ *À la question 8c), pourquoi avez-vous utilisé seulement une partie de l'aire de la forme cylindrique?* (Par exemple, parce que la face latérale de la forme cylindrique fait partie de l'aire du solide, mais pas les 2 faces correspondant aux bases du cylindre.)
◊ *Qu'est-ce qui fait qu'un solide a une grande aire?* (Par exemple, le fait que l'aire de certaines de ses faces est grande.)
◊ *Quelle formule de calcul d'aire d'un prisme ou d'un cylindre trouvez-vous la plus pratique?* (Par exemple, je préfère la formule $A = 2 \times A_{base} + P_{base} \times h$ puisqu'elle est facile à retenir et qu'elle s'applique à n'importe quel prisme. Pour le cylindre, il suffit de remplacer le périmètre de la base par la circonférence de la base puisqu'une circonférence est aussi un périmètre.)

Solutions

Note : Pour toute réponse faisant appel au nombre π, on donne la valeur exacte exprimée en termes de π et une valeur approximative calculée en fonction de la valeur de π arrondie à 3,14.

1. **a)** 25 cm²
b) 44 cm²
c) 16π cm² (ou 50,24 cm²)
d) 93,6 cm² $\left[6 \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 5{,}2\right)\right]$
e) 25π cm² (ou 78,5 cm²)

2. **a)** 2 car, par exemple, je dois déterminer l'aire de la base (que je peux multiplier par 2) et l'aire de l'un des 4 rectangles latéraux (que je peux multiplier par 4).
b) 5 car, par exemple, je dois déterminer l'aire de la base (que je peux multiplier par 2) et l'aire de chacun des 4 rectangles latéraux, étant donné que chacun a une largeur différente.
c) 2 car, par exemple, je dois déterminer l'aire de la base (que je peux multiplier par 2) et l'aire de la surface latérale.
d) 2 car, par exemple, je dois déterminer l'aire de la base (que je peux multiplier par 2) et l'aire de l'un des 6 rectangles latéraux (que je peux multiplier par 6).
e) 2 car, par exemple, je dois déterminer l'aire de la base (que je peux multiplier par 2) et l'aire de la surface latérale.

3. **a)** 250 cm² [(4 × 50) + (2 × 25)]
b) À l'aide du théorème de Pythagore, on peut déterminer que le quatrième côté du trapèze mesure 8,1 cm $\left(\sqrt{4^2 + 7^2}\right)$. L'aire du prisme mesure donc 790 cm² [(2 × 44) + (5 + 6 + 16 + 8,1) × 20)].
c) 128π cm² ou 401,9 cm² [(2 × 16π) + 96π]
d) 475,2 cm² [(2 × 93,6) + (6 × 48)]
e) 150π cm² ou 471 cm² [(2 × 25π) + 100π]

4. A : vrai, puisque le prisme pourrait être un cube.
B : vrai, puisque les deux bases d'un prisme ont toujours la même aire.
C : vrai, puisque le prisme pourrait avoir une base carrée.

5. **a)** C'est un cube. Chaque face a une aire de 25 cm^2 et des côtés de 5 cm.
b) C'est un prisme à base rectangulaire. Sa base mesure 3 cm sur 4 cm et sa hauteur mesure 5 cm.
c) C'est un prisme à base triangulaire. Sa hauteur mesure 10 cm et sa base a des côtés de 3 cm, 4 cm et 5 cm.
d) C'est un cylindre. Sa hauteur mesure 10 cm et sa base a un rayon de 3 cm.

6. Oui car, par exemple, un prisme d'une hauteur de 100 cm dont la base mesure 1 cm sur 1 cm a une aire de 402 cm^2. Par contre, un prisme d'une hauteur de 1 cm dont la base mesure 100 cm sur 100 cm a une aire de 20 400 cm^2.

7. Les triangles avant et arrière ont une aire de 200 cm^2 chacun $\left(\frac{1}{2} \times 20 \times 20\right)$. Le rectangle de gauche a une aire de 3 400 cm^2 (20 × 170). L'hypoténuse du triangle mesure $\sqrt{800}$ cm $\left(\sqrt{20^2 + 20^2}\right)$ ou environ 28,28 cm. Donc, le rectangle de droite a une aire de 4 807,6 cm^2 (28,28 × 170). L'aire de l'abreuvoir mesure donc 8 607,6 cm^2 (200 + 200 + 3 400 + 4 807,6).

8. **a)** 29 m^2 [2 × (2 × 1,7) + 2 × (2 × 3) + 2 × (3 × 1,7)]
b) 3,1π m^2 ou 9,7 m^2 [2 × π × (0,45)^2 + (0,9π × 3)]
c) 36,2 m^2 [29 + 9,7 – 4 × π × (0,45)^2]

9. Il est plus élevé puisque, par exemple, le prisme étant très long, mais étroit et court, le nombre de centimètres cubes correspondant à son volume n'est pas très différent du nombre de centimètres correspondant à sa longueur. Toutefois, le nombre de centimètres carrés correspondant à son aire est beaucoup plus élevé que le nombre de centimètres correspondant à cette même longueur.

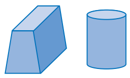
Question ouverte

Aire de prismes et de cylindres

Question ouverte

L'**aire d'un solide** désigne la somme des aires de toutes ses faces.

On peut utiliser l'aire d'un solide pour déterminer, par exemple, la plus petite quantité de matériel qui est nécessaire pour le couvrir.



- Choisis un nombre de centimètres carrés entre 100 et 1 000.
- Crée les cinq solides suivants de façon à ce que l'aire de chacun corresponde au nombre de centimètres carrés choisi. Explique ta démarche.
  1. Prisme à base carrée
  2. Prisme à base rectangulaire et non carrée
  3. Prisme à base trapézoïdale
  4. Prisme à base hexagonale ou octogonale
  5. Cylindre

Note : Pour toute réponse faisant appel au nombre π, tu peux donner la valeur exacte exprimée en termes de π ou une valeur approximative calculée en fonction de la valeur de π arrondie à 3,14.

18 ÉBAUCHE mars 2011 © Marian Small, 2011 Aire et volume de solides (9e année)

Fiche de réflexion

Aire de prismes et de cylindres (*Suite*)

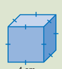
Fiche de réflexion

L'**aire d'un solide** désigne la somme des aires de toutes ses faces.

On peut utiliser l'aire d'un solide pour déterminer, par exemple, la plus petite quantité de matériel qui est nécessaire pour le couvrir, ou encore la quantité de peinture qui est nécessaire pour le peindre.

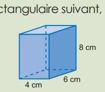
L'aire se mesure en unités carrées, comme des centimètres carrés, des mètres carrés, etc.

Le fait de connaître certaines relations entre les faces du solide permet de réduire le nombre de calculs à effectuer pour déterminer son aire. Par exemple, supposons que l'on a un cube dont les côtés mesurent 4 cm.



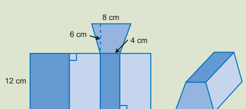
Puisque chaque face a une aire de 16 cm², on peut conclure que l'aire totale du cube mesure 96 cm².

Mais si l'on a le prisme à base rectangulaire suivant, les 6 faces ne sont pas identiques.



On a plutôt 3 paires de faces identiques.
Deux faces (devant et derrière) ont une aire de 32 cm² (4 × 8) chacune.
Deux faces (sur les côtés) ont une aire de 48 cm² (8 × 6) chacune.
Deux faces (en haut et en bas) ont une aire de 24 cm² (4 × 6) chacune.
Ainsi, l'aire totale sera égale à 208 cm² (2 × 32 + 2 × 48 + 2 × 24).

Une façon de visualiser l'aire totale d'un solide consiste à utiliser son développement. Prenons, par exemple, le développement d'un prisme à base trapézoïdale.



Aire et volume de solides (9e année) © Marian Small, 2011 ÉBAUCHE mars 2011 19

Aire de prismes et de cylindres (*Suite*)

Afin de déterminer l'aire du prisme, il suffit d'additionner les aires des 6 figures planes qui composent son développement.

Les 2 trapèzes ont chacun une aire de 36 cm² $\left[\frac{1}{2} \times (8 + 4) \times 6\right]$.

Afin de déterminer l'aire des 4 rectangles, on note que chacun a une hauteur de 12 cm et une largeur qui correspond à la mesure du côté du trapèze auquel il se rattache. Ainsi, un rectangle a une largeur de 8 cm, un autre a une largeur de 4 cm, et les deux autres ont une largeur qui correspond à la mesure des côtés non parallèles du trapèze.

Afin de déterminer la mesure de ces 2 côtés, on peut utiliser le théorème de Pythagore, en constatant que l'un des côtés du triangle rectangle mesure 6 cm et que l'autre mesure 2 cm $\left[\frac{1}{2} \times (8 - 4)\right]$. L'hypoténuse (le côté que l'on cherche à déterminer) mesure donc $\sqrt{(36 + 4)}$ cm ou 6,32 cm.

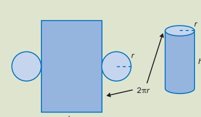
L'aire du prisme mesure alors 367,68 cm²
[(2 × 36) + (12 × 8) + (12 × 4) + (12 × 6,32) + (12 × 6,32)].

Notons que l'expression [(2 × 36) + (12 × 8) + (12 × 4) + (12 × 6,32) + (12 × 6,32)] est égale à l'expression [(2 × 36) + 12 × (8 + 4 + 6,32 + 6,32)] et que la somme (8 + 4 + 6,32 + 6,32) correspond au périmètre du trapèze à la base du prisme.

On peut donc déterminer l'aire (A) d'un prisme de hauteur h à l'aide de la formule :

$A = 2 \times A_{base} + P_{base} \times h$, où P_{base} représente le périmètre de la base du prisme.

On peut déterminer l'aire d'un cylindre en utilisant la même démarche. Par exemple, le développement suivant illustre les deux bases circulaires et la face latérale d'un cylindre.



Le rectangle correspond à un découpage de la face latérale du cylindre dans le sens de sa hauteur.

20 ÉBAUCHE mars 2011 © Marian Small, 2011 Aire et volume de solides (9e année)

Aire de prismes et de cylindres *(Suite)*

On note que l'une des dimensions du rectangle correspond à la hauteur du cylindre, et que l'autre correspond à la circonférence de la base du cylindre (puisque la surface latérale suit le contour des deux bases circulaires). L'aire du rectangle est donc égale à $C_{base} \times h$, où C_{base} représente la circonférence de la base et h représente la hauteur du cylindre.

On peut donc déterminer l'aire (A) d'un cylindre de hauteur h à l'aide de la formule :
$A = 2 \times A_{base} + C_{base} \times h$, où C_{base} représente la circonférence de la base du cylindre.

Puisqu'une circonférence est aussi un périmètre, cette formule est équivalente à celle utilisée pour déterminer l'aire d'un prisme.

Puisque la circonférence de la base est égale à $2\pi r$, l'aire du rectangle est donc égale à $2\pi rh$. De plus, l'aire de la base est égale à πr^2.

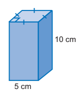
On peut donc aussi dire que la formule pour déterminer l'aire d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est :

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \text{ ou } A = 2\pi r(r + h).$$

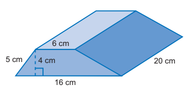
Note : Pour toute réponse faisant appel au nombre π, tu peux donner la valeur exacte exprimée en termes de π ou une valeur approximative calculée en fonction de la valeur de π arrondie à 3,14.

1. Détermine l'aire de la base de chacun des solides. Montre ton travail.

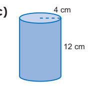
a)



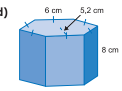
b)



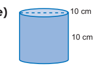
c)



d)



e)



2. Quel est le nombre minimal d'aires que tu dois déterminer séparément pour être en mesure de déterminer l'aire de chaque solide de la question 1? Justifie tes réponses.

3. Détermine l'aire de chaque solide de la question 1.

4. Dans une situation où l'on cherche à déterminer l'aire d'un prisme dont la base est un quadrilatère, indique si les énoncés suivants sont vrais ou faux. Justifie tes réponses.

A : Toutes les faces peuvent avoir la même aire.

B : Au moins 2 faces ont nécessairement la même aire.

C : Il est possible d'avoir exactement 4 faces avec la même aire.

5. Chacun des calculs suivants permet de déterminer l'aire d'un prisme ou d'un cylindre quelconque. Indique ce que tu peux conclure au sujet du solide et de ses dimensions.

a) 6×25 cm^2

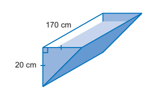
b) 2×12 cm^2 + 2×15 cm^2 + 2×20 cm^2

c) $2 \times \frac{(3 \times 4)}{2}$ cm^2 + 3×10 cm^2 + 4×10 cm^2 + 5×10 cm^2

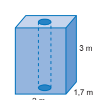
d) 18π cm^2 + 60π cm^2

6. Est-il possible qu'un prisme d'une certaine hauteur ait une aire plus petite qu'un prisme moins haut? Justifie ta réponse.

7. Combien de centimètres carrés de métal faut-il pour fabriquer cet abreuvoir? N'oublie pas que le dessus de l'abreuvoir est ouvert. Montre ton travail.



8. Un trou cylindrique ayant un rayon de 0,45 m est creusé sur toute la hauteur du prisme à base rectangulaire suivant.



a) Quelle serait l'aire du prisme s'il n'avait pas de trou?

b) Quelle est l'aire de la forme cylindrique, incluant ses bases inférieure et supérieure?

c) Quelle est l'aire du solide obtenu? Montre ton travail.

Aire de prismes et de cylindres (*Suite*)

9. Un prisme à base rectangulaire est très long, mais étroit et pas très haut. Le nombre de centimètres carrés correspondant à son aire est-il alors plus élevé ou moins élevé que le nombre de centimètres cubes correspondant à son volume? Justifie ta réponse.