RÉDUCTION DES ÉCARTS DE RENDEMENT

9e année

Module 8 : Périmètre et aire de figures planes

Guide de l'élève

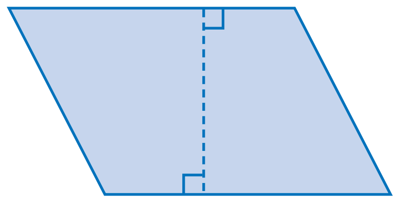
Module 8

Périmètre et aire de figures planes

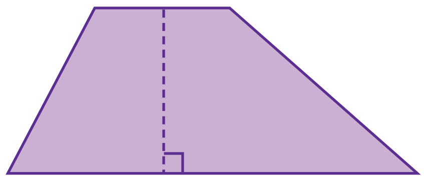
Évaluation diagnostique

1. Sur chacune des figures suivantes, indique à l'aide d'un surligneur les segments de droite dont on doit nécessairement connaître la mesure pour être à même de déterminer l'aire.

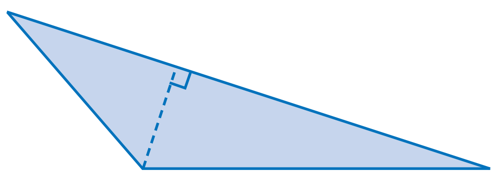
a) Parallélogramme



b) Trapèze

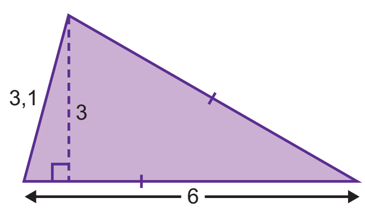


c) Triangle

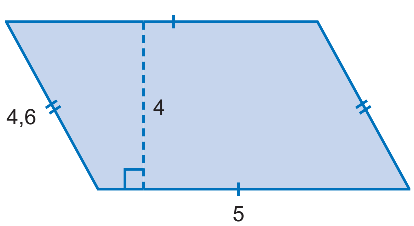


2. Détermine l'aire de chacune des figures suivantes.

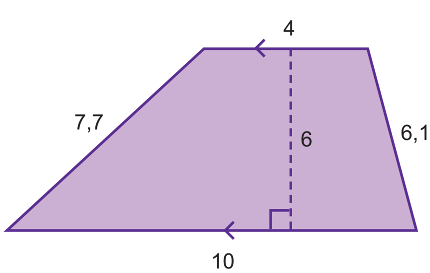
a)



b)



c)

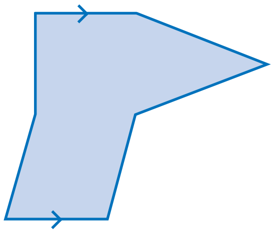


3. Un triangle a une base de 5 cm et une hauteur de 10 cm. Un parallélogramme ayant une base de 5 cm a la même aire que le triangle. Quelle est la hauteur du parallélogramme?

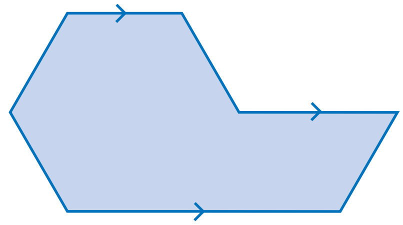
4. Quelles peuvent être les mesures de la hauteur et des bases d'un trapèze ayant une aire de 20 cm^2?

5. Décompose chacune des figures suivantes en figures planes simples (p. ex., triangles, rectangles, parallélogrammes ou trapèzes).

a)

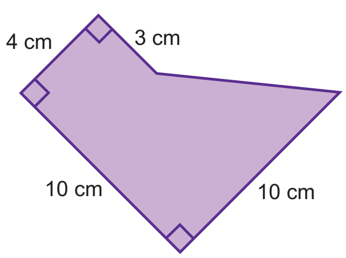


b)

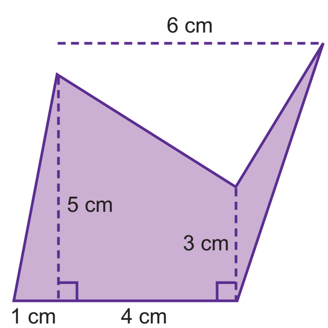


6. Détermine l'aire de chacune des figures suivantes. Explique ta démarche.

a)

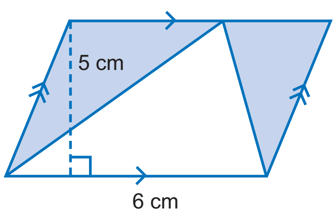


b)

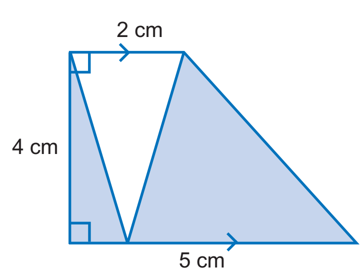


7. Détermine l'aire totale des surfaces ombrées de chacune des figures suivantes.

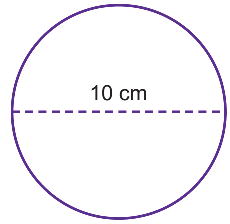
a)



b)



8. Un cercle a un diamètre de 10 cm.



a) Quelle est l'aire de ce cercle?

b) Quelle est la circonférence de ce cercle?

9. La circonférence d'un cercle est égale au périmètre d'un carré dont les côtés mesurent 3 cm. Quel est le diamètre du cercle? Explique ta réponse.

10. Une ficelle est 3 fois plus longue que le diamètre d'un cercle. Lequel des énoncés suivants est alors vrai?

a) La ficelle pourrait faire presque la moitié du tour du cercle.

b) La ficelle pourrait faire presque le tour complet du cercle.

c) La ficelle pourrait faire le tour complet du cercle et un peu plus.

d) La ficelle pourrait faire presque 2 fois le tour complet du cercle.

11. Un cercle a une aire d'environ 20 cm^2. Lesquels des énoncés suivants sont alors vrais?

a) Le rayon mesure environ 2,5 cm.

b) Le rayon mesure environ 5 cm.

c) Le diamètre mesure environ 5 cm.

d) Le diamètre mesure environ 10 cm.

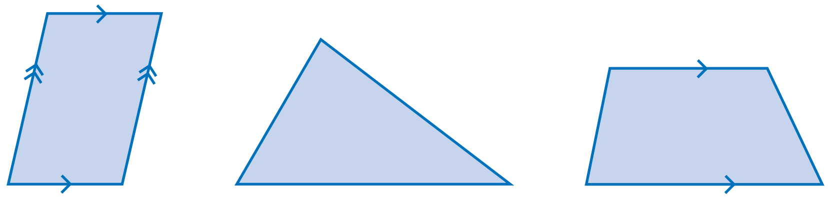
e) La circonférence mesure environ 15 cm.

f) La circonférence mesure environ 30 cm.

Aire de parallélogrammes, de triangles et de trapèzes

Question ouverte

Le parallélogramme, le triangle et le trapèze suivants ont la même aire et aucun d'eux n'a d'angle droit.



- **Étape 1 :** Assigne une valeur commune à l'aire des trois figures. En tenant compte de l'aire choisie, indique ensuite les dimensions (base, hauteur) que chacune des trois figures pourrait avoir.

- **Étape 2 :** Répète l'étape 1 en utilisant la même aire, mais en proposant des dimensions différentes pour les trois figures.

- **Étape 3 :** Répète les étapes 1 et 2 en utilisant deux aires différentes.

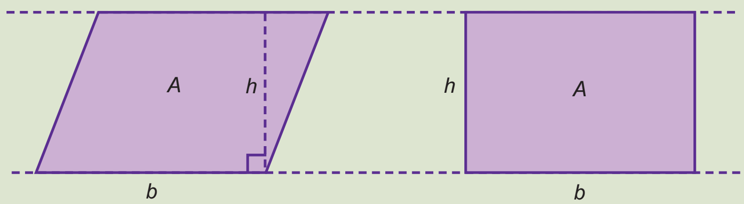
Fiche de réflexion

Une façon de déterminer l'aire d'une figure plane consiste à placer la figure sur un quadrillé et à dénombrer les carrés du quadrillé qui sont ainsi couverts.

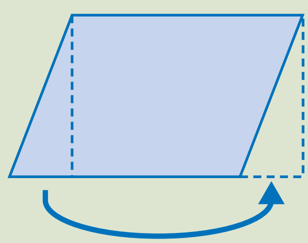
On peut également utiliser une formule qui permet de déterminer l'aire d'une figure plane à partir de ses dimensions.

Aire de parallélogrammes

Supposons qu'un rectangle a la même base et la même hauteur qu'un parallélogramme. On sait que l'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base et de sa hauteur.



Le parallélogramme peut être transformé en rectangle. Par conséquent, si l'on connaît les dimensions de la base et de la hauteur d'un parallélogramme, on peut déterminer son aire en appliquant la même formule que celle que l'on utilise pour déterminer l'aire d'un rectangle.



$A = b \times h$

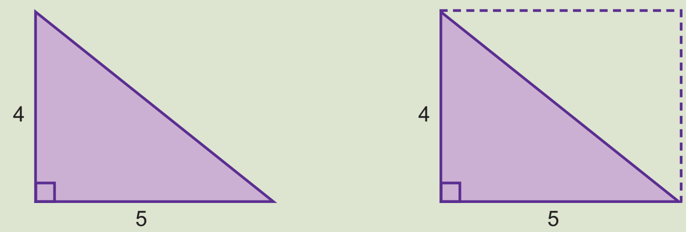
Il est à noter que la hauteur du parallélogramme est inférieure à la longueur de son côté incliné. Il est donc important d'utiliser les mesures de la base et de la hauteur d'un parallélogramme pour determiner son aire, et non les mesures de ses côtés.

Si l'on connaît l'aire d'un parallélogramme, ainsi que la mesure de sa base ou de sa hauteur, on peut déterminer la dimension manquante en effectuant une division. Par exemple, un parallélogramme ayant une aire de 20 cm² et une base de 4 cm a une hauteur de 5 cm (20 ÷ 4).

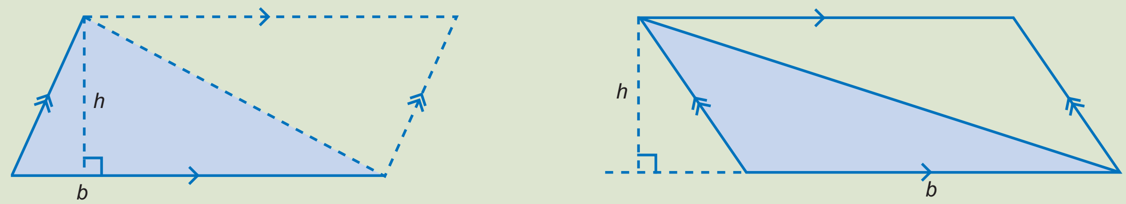
Aire de triangles

Pour déterminer l'aire de triangles rectangles, il suffit d'utiliser le fait que chaque triangle rectangle correspond à la moitié d'un rectangle.

Par exemple, l'aire du triangle rectangle ci-dessous est égale à $\frac{1}{2}$ de 4×5 :



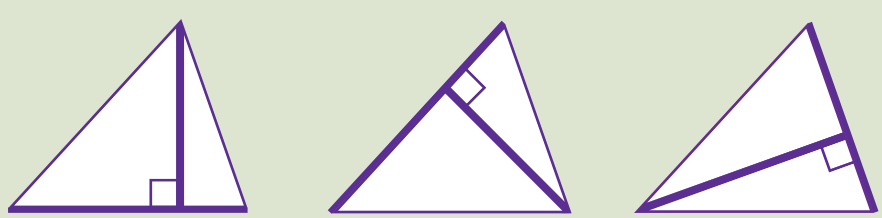
Il n'est pas aussi simple de visualiser les autres types de triangles en fonction de rectangles. On peut toutefois déterminer leur aire en utilisant le fait qu'ils correspondent à la moitié d'un parallélogramme.



Chaque triangle correspond à la moitié d'un parallélogramme ayant la même base et la même hauteur.

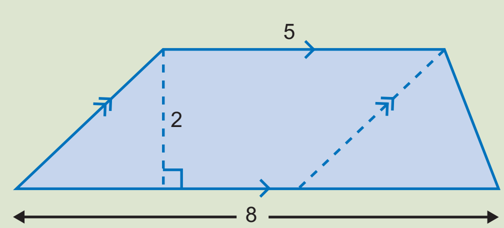
Note : Il est parfois nécessaire, comme pour le triangle de droite, de tracer la hauteur du triangle à l'extérieur de la figure en prolongeant la base.

Tout côté d'un triangle peut être considéré comme la base de ce triangle. En revanche, la hauteur utilisée doit absolument correspondre à la droite qui est perpendiculaire à la base choisie. Comme démontré ci-dessous, il existe trois combinaisons de base et de hauteur dans un triangle.



Aire de trapèzes

Tout trapèze peut être décomposé en un parallélogramme et un triangle. On peut donc déterminer l'aire du trapèze en additionnant l'aire du parallélogramme et l'aire du triangle. Par exemple, dans la figure ci-contre,



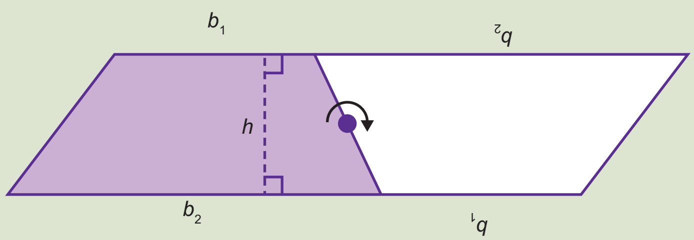
les 8 unités correspondant à la base du trapèze peuvent être réparties de la manière suivante : 5 unités pour la base du parallélogramme et 3 unités pour la base du triangle. Le parallélogramme et le triangle ont une hauteur égale à 2 unités.

L'aire du parallélogramme est égale à 10 unités carrées (2 × 5).

L'aire du triangle est égale à 3 unités carrées $\left(\frac{1}{2} \text{ de } 3 \times 2\right)$.

Donc, l'aire du trapèze est égale à 13 unités carrées.

On peut également déterminer l'aire d'un trapèze en utilisant le fait que tout trapèze correspond à la moitié d'un parallélogramme. Pour illustrer ce fait, il suffit de faire pivoter une copie du trapèze de 180° en juxtaposant un côté de l'original et un côté de la copie.

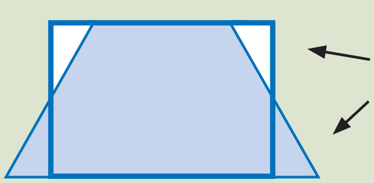


La base du parallélogramme ainsi formé est égale à la somme des deux bases du trapèze ($b_1 + b_2$) et sa hauteur est égale à la hauteur du trapèze (h). L'aire du parallélogramme est donc égale à $(b_1 + b_2)h$.

En revanche, l'aire du trapèze est égale à seulement la moitié de l'aire du parallélogramme. Donc, l'aire du trapèze est égale à $\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$.

Ainsi, l'aire du trapèze illustré à la page précédente est égale à 13 unités carrées $\left[\frac{1}{2}(5 + 8) \times 2\right]$.

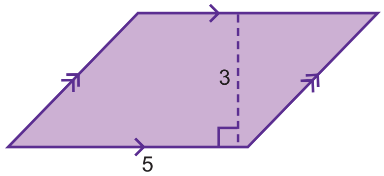
On peut également envisager la formule de la manière suivante : calculer la moyenne des deux bases et la multiplier par la hauteur. Ce raisonnement est logique si l'on considère que l'aire du trapèze correspond à l'aire du rectangle qui la même hauteur que le trapèze et une base égale à la moyenne des deux bases du trapèze.



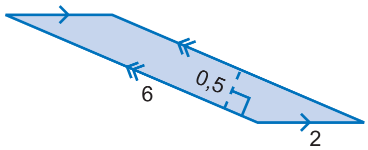
L'aire des deux surfaces blanches supplémentaires correspond à l'aire des deux surfaces triangulaires situées à l'extérieur du rectangle.

1. Détermine l'aire de chacune des figures suivantes.

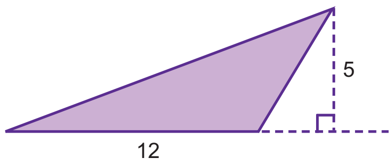
a)



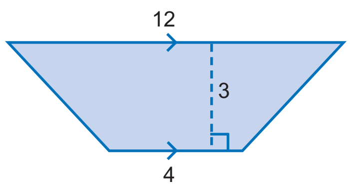
b)



c)

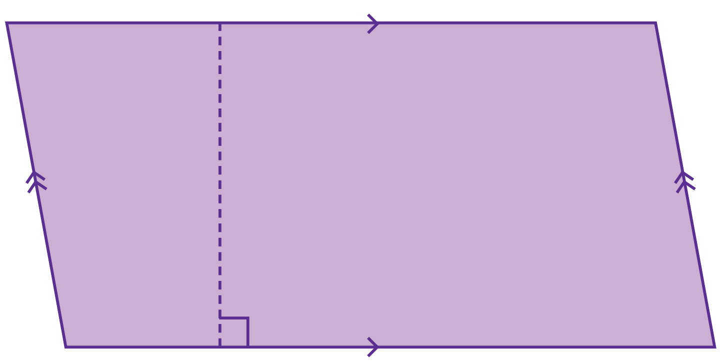


d)

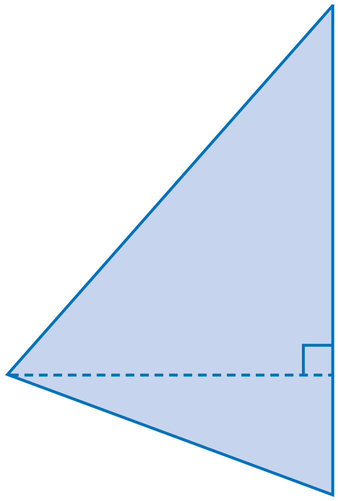


2. Utilise ta règle pour obtenir les mesures dont tu as besoin pour déterminer l'aire de chaque figure. Détermine ensuite l'aire de chaque figure et indique les étapes de ta démarche.

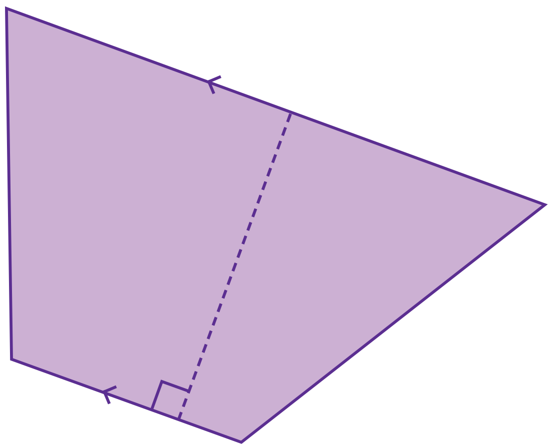
a)



b)



c)



3. Détermine la hauteur de chacune des figures planes suivantes.

a) Un parallélogramme ayant une aire de 30 cm^2 et une base de 5 cm.

b) Un triangle ayant une aire de 30 cm^2 et une base de 5 cm.

c) Un trapèze ayant une aire de 30 cm^2 et des bases de 4 cm et de 8 cm.

4. a) Construis un triangle non rectangle et détermine son aire.

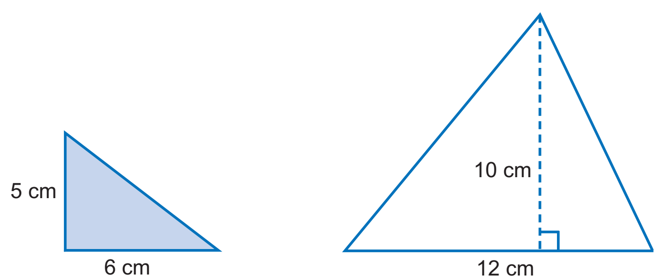
b) Choisis un autre côté du triangle comme base et mesure-le.

c) Détermine la hauteur correspondant à cette base et justifie ta réponse.

d) Vérifie la mesure de la hauteur de ton triangle à l'aide d'une règle.

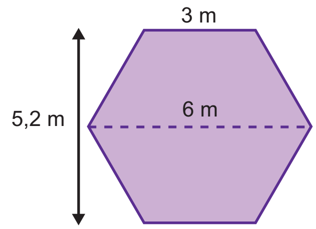
5. Un parallélogramme et un triangle ont la même base et la même aire. Que sais-tu de leur hauteur respective? Explique ta réponse.

6. Comment peux-tu savoir que l'aire du triangle bleu est égale à $\frac{1}{4}$ de l'aire du triangle blanc sans déterminer l'aire de chaque triangle?

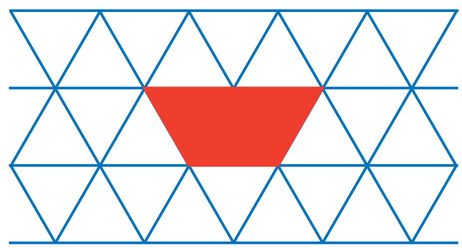


7. Construis 3 trapèzes différents, chacun ayant une aire de 60 unités carrées. Indique ensuite sur chaque trapèze les mesures des bases et de la hauteur.

8. Détermine l'aire de l'hexagone régulier suivant et explique ta réponse.



9. Le dallage ci-dessous est composé de triangles équilatéraux ayant une base de 2,5 cm et une hauteur de 2,2 cm. Détermine l'aire du trapèze rouge au centre du dallage.



10. Un trapèze a une aire de 100 cm^2 et une hauteur de 10 cm. Que sais-tu d'autre au sujet des dimensions du trapèze?

11. Construis un trapèze quelconque, puis divise-le en deux triangles. Crée une formule pour déterminer l'aire du trapèze en fonction des aires de ces deux triangles. Décris ta démarche.

Aire de figures composées

Question ouverte

Une **figure composée** est constituée de diverses figures planes simples telles que les rectangles, les triangles, les parallélogrammes et les trapèzes.

- Construis au moins trois figures composées en tenant compte des restrictions suivantes :
  - chaque figure doit contenir au moins 1 parallélogramme ou 1 trapèze;
  - chaque figure doit être inscrite dans un rectangle mesurant 30 cm sur 20 cm;
  - l'aire totale de chaque figure doit être égale à 500 cm^2.

- Sur chacune des figures construites, indique les mesures des segments de droite des figures planes simples dont tu as besoin pour t'assurer que l'aire totale de la figure composée soit égale à 500 cm^2.

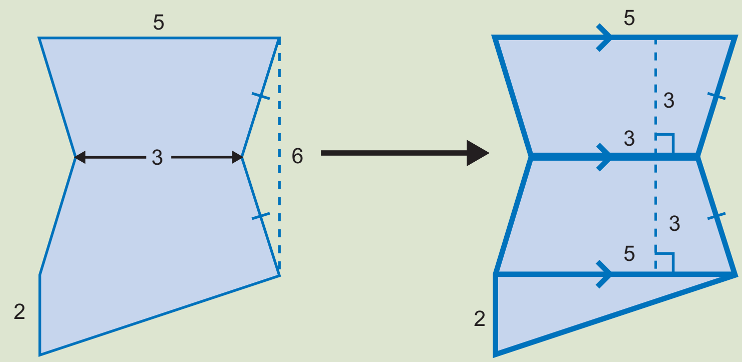
- Détermine, pour chaque figure composée, l'aire de chacune des figures planes simples qui la composent.

Fiche de réflexion

Une **figure composée** est constituée de diverses figures planes simples telles que les rectangles, les triangles, les parallélogrammes et les trapèzes.

On peut déterminer l'aire d'une figure composée en déterminant l'aire des figures planes simples qui la composent.

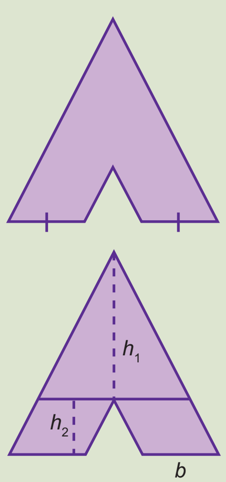
Par exemple, on peut déterminer l'aire de la figure de gauche ci-dessous en la décomposant d'abord en 2 trapèzes et 1 triangle.



Chaque trapèze a une hauteur de 3 unités (6 ÷ 2) et une aire de 12 unités carrées $\left[\frac{1}{2}(3 + 5) \times 3\right]$. Le triangle a une aire de 5 unités carrées $\left[\frac{1}{2}(2 \times 5)\right]$. Par conséquent, la figure composée a une aire de 29 unités carrées (12 + 12 + 5).

Il est important que les dimensions dont on a besoin pour déterminer l'aire des figures planes simples soient fournies ou que l'on dispose de suffisamment de données pour les déduire. Par exemple, pour déterminer l'aire de la figure composée ci-dessus, on a pu déduire que chaque trapèze avait une hauteur de 3 unités en s'appuyant sur les informations données.

On pourrait déterminer l'aire de la figure composée ci-dessous en connaissant seulement certaines de ses mesures.

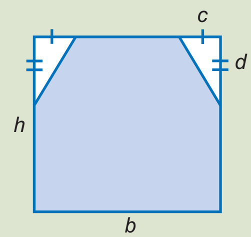


On peut d'abord décomposer la figure en 1 triangle et 2 parallélogrammes congruents. Si l'on connaît la base b de l'un des parallélogrammes ainsi que les hauteurs h_1 et h_2 indiquées, on peut déterminer l'aire de la figure plane dans la mesure où l'on reconnaît que la base du triangle est égale au double de la base b.

$A = bh_2 + bh_2 + \frac{1}{2}(2b \times h_1)$ ou

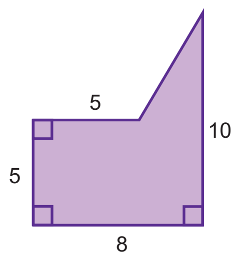
$A = 2bh_2 + bh_1$

Il est parfois plus facile de déterminer l'aire d'une figure composée en faisant la différence entre les aires de figures planes simples. Par exemple, pour déterminer l'aire de la figure bleue ci-dessous, il suffit de faire la différence entre l'aire du rectangle et les aires des 2 triangles. Ainsi, $A = bh - 2 \times \frac{1}{2}cd$.

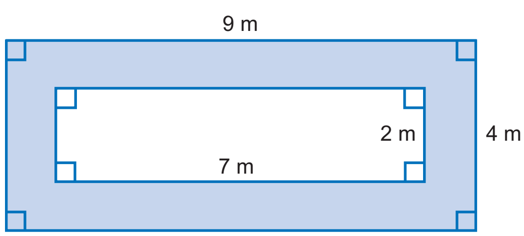


1. Décris une façon de déterminer l'aire de la surface colorée à partir de l'aire de figures planes simples.

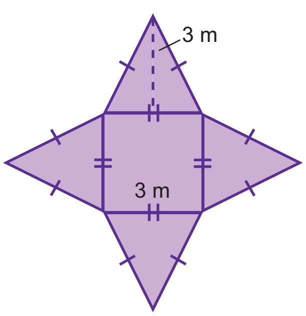
a)



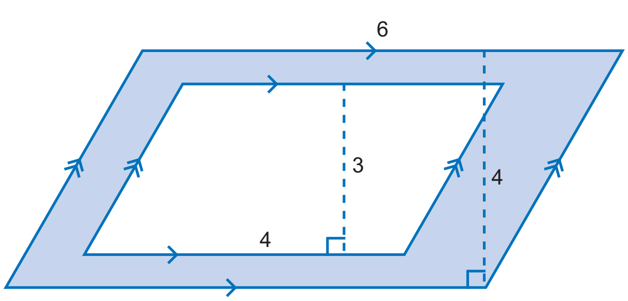
b)



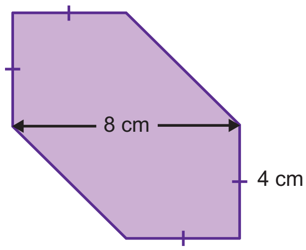
c)



d)



e)



2. Détermine l'aire de chacune des surfaces colorées présentées à la question 1.

a)

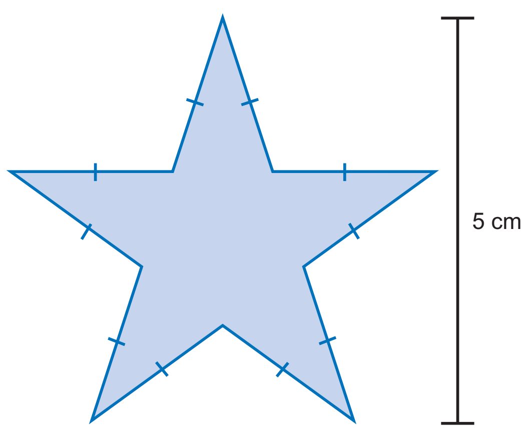
b)

c)

d)

e)

3. a) De quelle façon peux-tu décomposer l'étoile suivante en figures planes simples afin de faciliter le calcul de son aire?



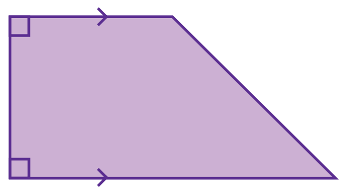
b) Surligne les segments de droite dont tu dois connaître la mesure pour déterminer l'aire des différentes figures planes simples. Utilise ta règle pour obtenir ces mesures.

c) Détermine l'aire de l'étoile.

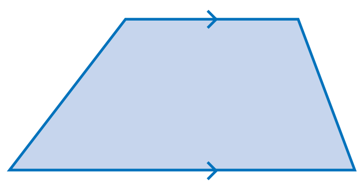
4. a) Démontre que tout trapèze peut être décomposé en 3 triangles.

b) Quelles dimensions dois-tu connaître pour déterminer l'aire de chacun des 3 triangles? Explique ta réponse.

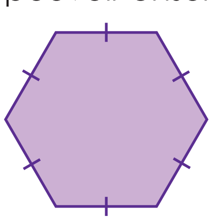
5. a) Si tu connais seulement la mesure de chacun des côtés d'un trapèze rectangle, peux-tu déterminer son aire sans avoir à effectuer d'autres mesures? Explique ta réponse.



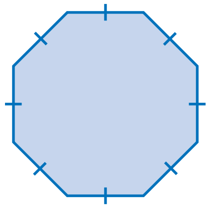
b) Si tu connais seulement la mesure de chacun des côtés d'un trapèze non rectangle, peux-tu déterminer son aire sans avoir à effectuer d'autres mesures? Explique ta réponse.



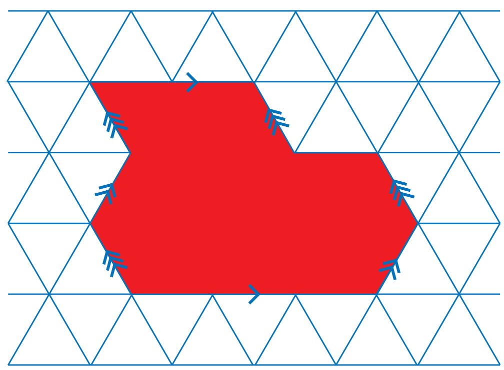
6. a) Comment peux-tu décomposer l'hexagone régulier suivant en figures planes simples afin de déterminer son aire? Surligne le plus petit nombre possible de segments de droite que tu aurais besoin de mesurer avec une règle pour pouvoir ensuite déterminer l'aire de l'hexagone. Explique ta réponse.



b) Reprends la question a) en utilisant cette fois l'octogone régulier suivant.

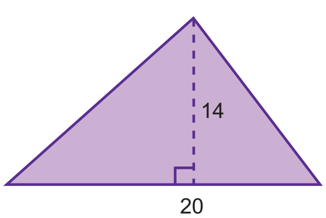


7. Décris deux façons différentes de déterminer l'aire de la figure colorée suivante. Dans chaque cas, indique les mesures que tu dois connaître pour être à même de déterminer l'aire. Explique ta réponse.

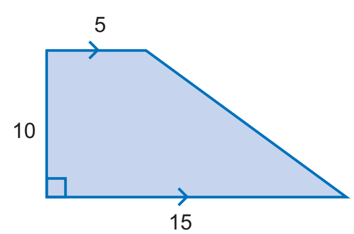


8. Décompose chaque figure en deux figures planes ayant la même aire. Démontre dans chaque cas que les deux figures planes ont la même aire.

a)



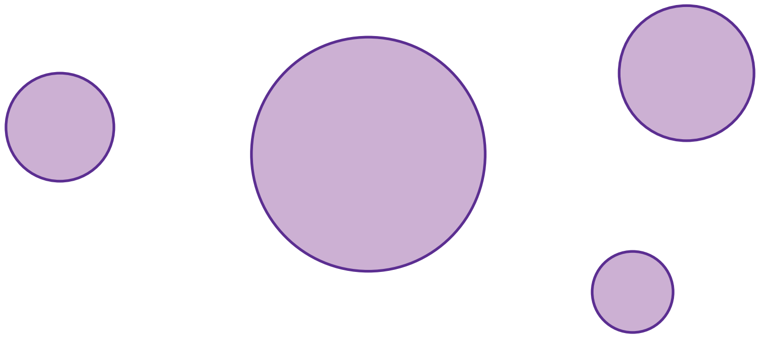
b)



Circonférence et aire de cercles

Question ouverte

Construis au moins 4 cercles de tailles différentes.



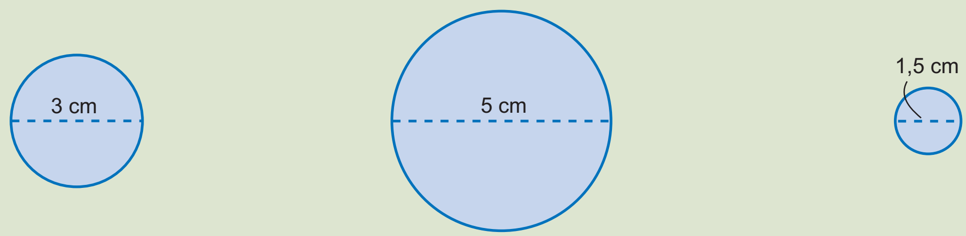
- Mesure la circonférence de chaque cercle. Compare cette mesure au diamètre du cercle.
- Estime l'aire de chaque cercle à l'aide de papier quadrillé. Compare cette aire à l'aire d'un carré dont les côtés correspondent au rayon du cercle.
- Décris tes constatations par rapport aux deux comparaisons ci-dessus, puis illustre la vraisemblance de ces constatations à l'aide de dessins. Explique le lien entre tes dessins et tes constatations.

Fiche de réflexion

Il est plus difficile de mesurer le contour de cercles que de mesurer le contour de polygones, car il n'est pas possible d'utiliser une règle. Même l'utilisation d'un galon à mesurer ne permet pas d'obtenir une mesure précise. C'est la raison pour laquelle les formules permettant de déterminer la circonférence et l'aire d'un cercle sont utiles.

Circonférence

La circonférence d'un cercle correspond à la mesure de son contour, c'est-à-dire à son périmètre. Une ficelle a été utilisée pour mesurer la circonférence de chacun des cercles ci-dessous. On peut constater que le rapport entre la circonférence et le diamètre (la largeur du cercle) est le même pour chaque cercle.



Estimation de la circonférence : 9,4 cm
Rapport : $\frac{9,4}{3} = 3,133$

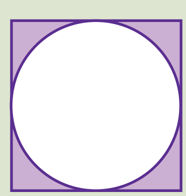
Estimation de la circonférence : 15,7 cm
Rapport : $\frac{15,7}{5} = 3,14$

Estimation de la circonférence : 4,7 cm
Rapport : $\frac{4,7}{1,5} = 3,133$

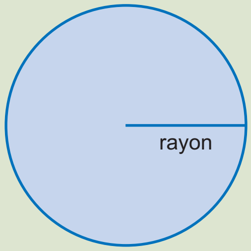
Le rapport exact est exprimé par un nombre irrationnel appelé π (se prononce **pi**) dont la valeur approximative est 3,1415926...

Puisque π correspond au quotient de la circonférence (C) et du diamètre (d) d'un cercle, c'est-à-dire que $\pi = \frac{C}{d}$, on peut conclure que $C = \pi d$.

La figure ci-dessous représentant un cercle inscrit à l'intérieur d'un carré illustre la vraisemblance de ce rapport entre la circonférence et le diamètre d'un cercle. On voit que le périmètre du carré dont les côtés correspondent au diamètre du cercle est égal à 4 fois le diamètre. De plus, puisque le contour du cercle ne « s'étend » pas tout à fait jusque dans les coins du carré, on voit que la circonférence du cercle est inférieure au périmètre du carré et donc, inférieure à 4 fois le diamètre du cercle. Il est donc vraisemblable que la circonférence d'un cercle soit égale à un peu plus de 3 fois le diamètre du cercle.



Le rayon (r) d'un cercle correspond à un segment de droite partant du centre du cercle et se terminant à un point quelconque sur sa circonférence. Le rayon est toujours égal à la moitié du diamètre.

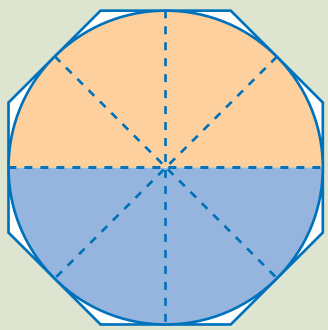


Puisque $C = \pi d$,
alors $C = \pi \times 2r$ ou $C = 2\pi r$

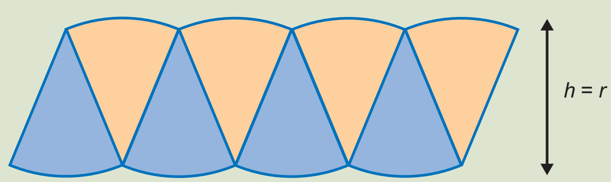
Aire

Le fait de connaître le rayon ou le diamètre d'un cercle nous permet de déterminer son aire.

Pour déterminer l'aire d'un cercle quelconque, il est utile de l'inscrire dans un polygone. Par exemple, on pourrait inscrire le cercle dans un octogone et le diviser ensuite en 8 secteurs égaux comme suit.



On peut découper les 8 secteurs et les réorganiser de façon à créer une figure qui correspond presque à un parallélogramme. Si l'on avait inscrit le cercle dans un polygone ayant un plus grand nombre de côtés, les courbes au niveau des bases de la figure seraient moins prononcées et ressembleraient presque à des lignes droites.

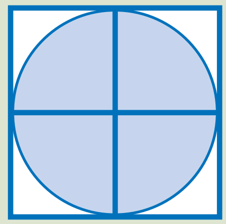


La hauteur du « parallélogramme » correspond au rayon du cercle.

Chaque base du « parallélogramme » mesure la moitié de la circonférence du cercle étant donné que les deux bases constituent la circonférence complète. Or, puisque $C = 2\pi r$, alors $\frac{1}{2}C = \pi r$. Donc, la base est égale à πr.

L'aire du « parallélogramme », et par conséquent l'aire du cercle, est égale au produit de la base et de la hauteur, soit $A = b \times h = \pi r \times r$ ou $A = \pi r^2$.

La figure ci-dessous peut nous aider à comprendre pourquoi il est vraisemblable que l'aire d'un cercle soit égale à un peu plus de 3 fois l'aire d'un carré dont les côtés correspondent au rayon du cercle. On voit en effet que l'aire du cercle est quelque peu inférieure à l'aire des 4 petits carrés ayant pour côté le rayon du cercle étant donné que le cercle ne recouvre pas les petites surfaces blanches.

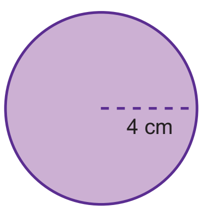


Puisque $A = \pi r^2$, alors $r^2 = \frac{A}{\pi}$ ou $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$.

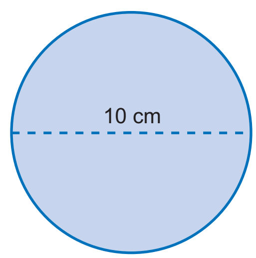
Ainsi, si l'on connaît l'aire d'un cercle, on peut utiliser la formule $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ pour déterminer la mesure de son rayon.

1. Détermine la circonférence de chaque cercle.

a)

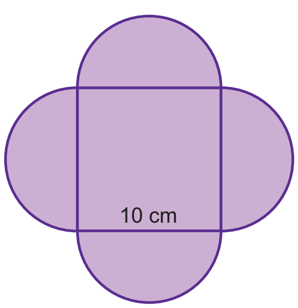


b)

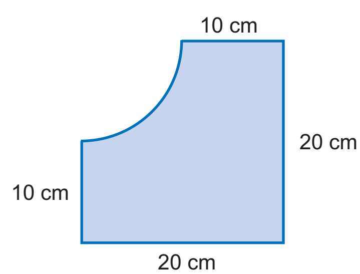


2. Détermine le périmètre de chaque figure.

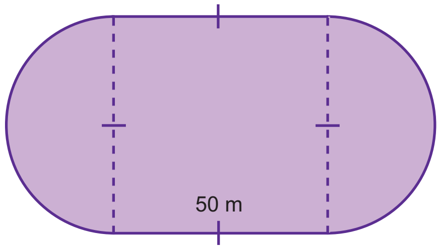
a)



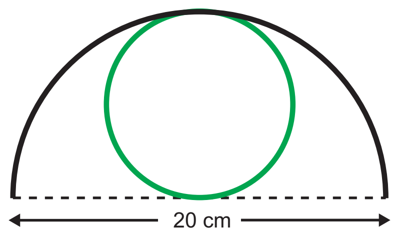
b)



c)



3. Une ficelle noire est utilisée pour délimiter le demi-cercle du schéma suivant et une ficelle verte est utilisée pour délimiter le cercle. Quelle est la relation entre les longueurs de ces deux ficelles? Comment le sais-tu?



4. Détermine la mesure du rayon d'un cercle ayant une circonférence de 20 cm.

5. Si le diamètre d'un cercle correspond au double du diamètre d'un autre cercle, quelle est la relation entre les circonférences? Explique ta réponse.

6. Détermine l'aire de chacune des figures présentées à la question 2.

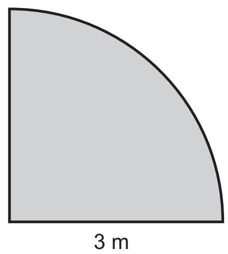
a)

b)

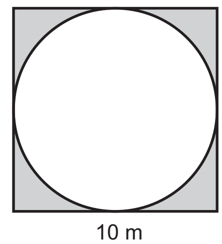
c)

7. Détermine l'aire de la surface ombrée de chacune des figures suivantes. Explique ta réponse.

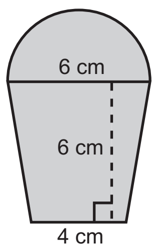
a)



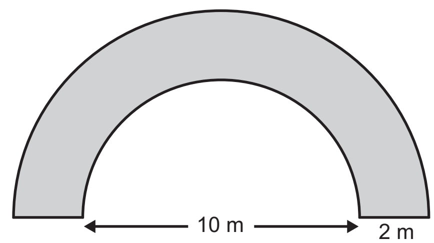
b)



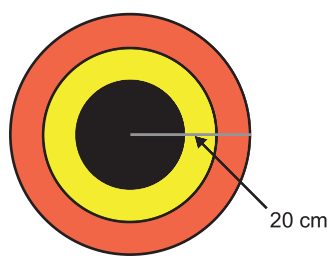
c)



d)

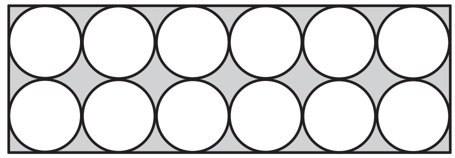


8. L'aire du cercle noir au centre de la cible correspond à $\frac{1}{5}$ de l'aire totale de la cible. Détermine la mesure du rayon du cercle noir.

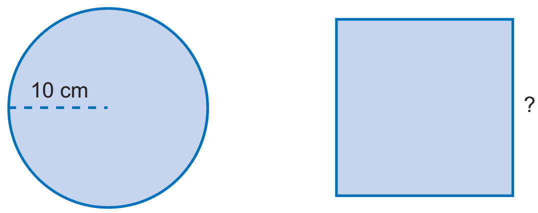


9. Détermine la mesure du rayon d'un cercle ayant une aire de 10 cm².

10. Détermine l'aire de la surface ombrée de la figure suivante.



11. Un carré a la même aire qu'un cercle ayant un rayon de 10 cm. Quelle est la mesure de chacun des côtés du carré?



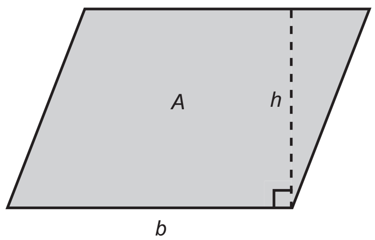
12. Si l'aire du cercle A mesure 10 cm² de plus que l'aire du cercle B, quelle est la relation entre les rayons? Justifie ta réponse.

13. Explique pourquoi il suffit de connaître soit le rayon, soit le diamètre, soit la circonférence, soit l'aire d'un cercle pour être en mesure déterminer chacune des trois autres mesures?

Fiche de rappel de formules

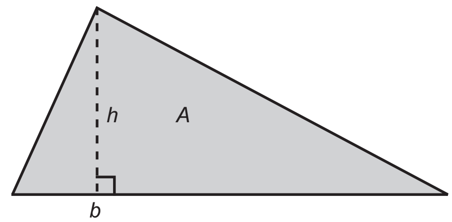
Aire d'un parallélogramme

$A = bh$



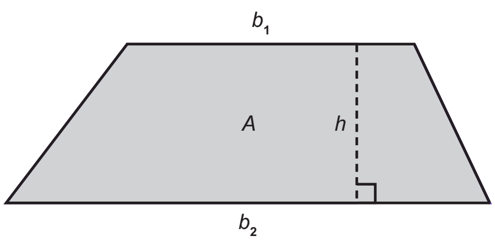
Aire d'un triangle

$A = \frac{1}{2}bh$



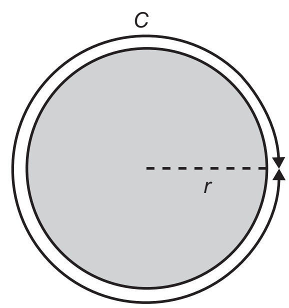
Aire d'un trapèze

$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$



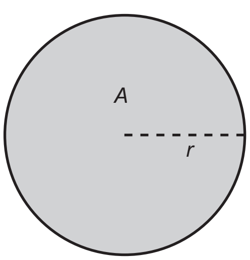
Circonférence d'un cercle

$C = 2\pi r$

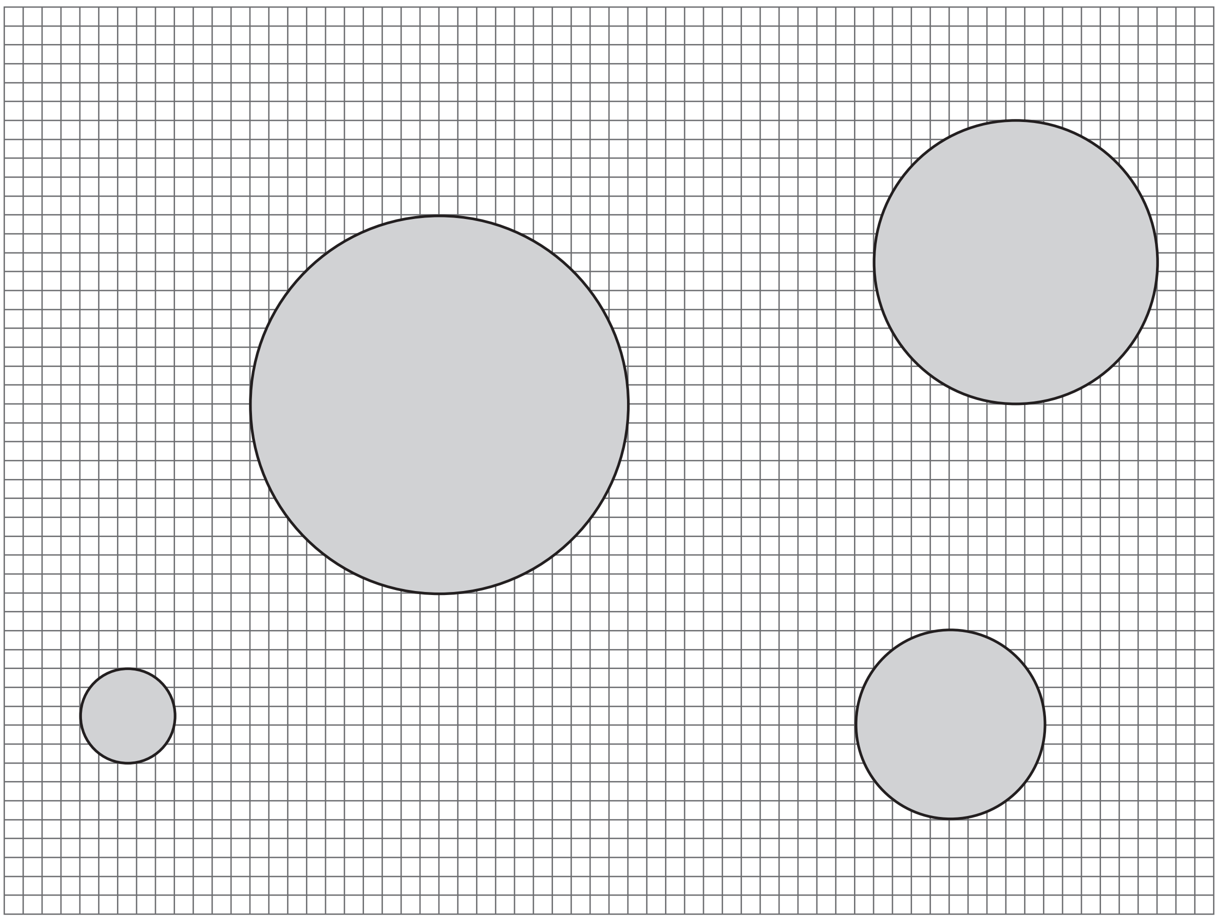


Aire d'un cercle

$A = \pi r^2$



Quatre cercles



Rectangle et parallélogramme

Cercle subdivisé en secteurs