Éducation en langue
française en Ontario
UN MONDE DE POSSIBILITÉS

Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 7e à la 9e année

Fascicule 2 : Algèbre

(Version provisoire pour mise à l'essai)

2012

Éducation en Ontario L'excellence pour tous et toutes

Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 7^{e} à la 9^{e} année
Fascicule 1 : Éléments fondamentaux *1. Principes de base* *2. Résolution de problèmes* *3. Communication*
Fascicule 2 : Algèbre
Fascicule 3 : Mesure et Géométrie

Ce document a été produit en s'efforçant, dans la mesure du possible, d'identifier les ressources et outils mathématiques (p. ex., le matériel de manipulation) par leur nom générique. Dans le cas où un produit spécifique est utilisé par le personnel enseignant des écoles de l'Ontario, ce produit a été identifié par la marque sous laquelle il est commercialisé. L'inclusion des références aux produits spécifiques dans le présent document ne signifie aucunement que le Ministère de l'Éducation en recommande l'utilisation.

Table des matières

PRÉFACE

Le Ministère de l'Éducation de l'Ontario a publié en 2006 une série de guides pédagogiques composée d'un guide principal et de guides d'accompagnement pour appuyer la mise en œuvre des recommandations présentées dans les rapports de tables rondes d'experts en mathématiques. Ces documents, intitulés *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année* ont connu un grand succès à l'élémentaire. Ils comblent un grand besoin de ressources d'appui et proposent des stratégies précises pour l'élaboration d'un programme de mathématiques efficace et la création d'une communauté d'apprenantes et d'apprenants chez qui le raisonnement mathématique est développé et valorisé.

Depuis la publication de cette série, on constate une demande croissante pour une version similaire couvrant l'enseignement des mathématiques au cycle intermédiaire. Ce besoin s'explique par un manque de ressources pédagogiques de ce genre pour le cycle intermédiaire. Toutes les consultations menées en 2011 auprès des parties concernées ont clairement démontré l'urgence et la nécessité de produire, sous forme de fascicules, un guide portant sur des stratégies efficaces pour l'enseignement des mathématiques de la 7e et la 9e année.

Contrairement à la série de l'élémentaire, le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 7e à la 9e année* ne contient pas de sections portant sur les grandes idées et les situations d'apprentissages. Il porte plutôt sur la résolution de problèmes comme principal contexte d'apprentissage des mathématiques et sur la communication comme moyen de développement et d'expression du raisonnement mathématique. Il contient également des stratégies d'évaluation conforme à la politique énoncée dans *Faire croître le succès* (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010) ainsi que des stratégies de gestion de classe et de communication.

Le Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 7e à la 9e année comprend trois fascicules. Le premier porte sur les principes de base de l'enseignement des mathématiques, la résolution de problèmes et la communication mathématique. Le deuxième se concentre sur les concepts algébriques retrouvés dans le domaine d'étude *Modélisation et algèbre* de 7e et 8e année, et dans les domaines d'étude *Relations* et *Numération et algèbre* de 9e année. Le troisième et dernier traite des concepts de mesure et de géométrie retrouvés dans les deux domaines d'étude de 7e et 8e année, soit *Géométrie et sens de l'espace* et *Mesure,* et *Mesure et géométrie* du programme-cadre de mathématiques de 9e année. Ils sont conçus pour aider l'enseignante ou l'enseignant à s'approprier la pédagogie propre à chaque domaine mathématique afin d'améliorer le rendement des élèves en mathématiques.

Ces documents d'appui aux programmes-cadres de mathématiques ont été élaborés en conformité avec les principales initiatives ministérielles pour soutenir la réussite scolaire des élèves et appuyer le développement durable de la communauté scolaire de langue française de l'Ontario. Ils mettent l'accent, entre autres, sur des stratégies d'enseignement qui favorisent l'acquisition par chaque élève, de compétences en communication orale.

INTRODUCTION

> *Les domaines des cours de 9e année ont été conçus de façon à consolider les contenus de 8e année tout en ouvrant de nouvelles perspectives à l'élève pour la poursuite de ses études. Ils sont semblables à ceux du curriculum du palier élémentaire. Certaines modifications ont néanmoins été apportées afin de les adapter à la nouvelle orientation que prennent les mathématiques au palier secondaire.*
>
> (Ministère de l'Éducation, 2005b, p. 9)

Une des modifications importantes est la réorganisation du domaine d'étude à l'élémentaire, *Modélisation et algèbre,* en deux domaines d'études en 9e année, *Relations* et *Numération et algèbre*. Il est important de noter que le domaine *Modélisation et algèbre* à l'élémentaire est composé des rubriques *Relations* et *Concepts algébriques*. La description de ces rubriques en 8e année est la suivante : Relations – *L'élève apprend à représenter une relation simple à l'aide d'une table de valeurs, d'un graphique ou d'une équation pour lui permettre de repérer une régularité et de déduire, déterminer et expliquer la règle qui sert à compléter et à prolonger des suites numériques;* Concepts algébriques – *L'élève apprend à représenter des situations d'égalité, ce qui l'aide à trouver la valeur de l'inconnue dans une équation et à évaluer des expressions algébriques (Ministère de l'Éducation, 2005a, p. 85).*

En 9e année, le domaine d'étude *Relations* traite en particulier de la fonction affine et permet à l'élève de consolider les trois représentations d'une situation pour l'analyser et l'interpréter. Ce domaine permet à l'élève d'approfondir les concepts algébriques abordés au **cycle moyen** et au début du cycle intermédiaire.

ENSEIGNEMENT EFFICACE DE L'ALGÈBRE

Selon Radford et Demers (2004, p. 30), « Un des buts de l'enseignement est justement d'amener l'élève à faire face à des problèmes dont les solutions sont au-delà de son niveau conceptuel actuel, mais qui deviennent à sa portée grâce à un travail de collaboration avec ses pairs ou avec l'enseignante ou l'enseignant. » Les concepts algébriques font partie intégrante de l'enseignement des mathématiques dès le **cycle moyen**.

Au **cycle intermédiaire**, cependant, l'apprentissage mathématique se caractérise surtout par le passage de situations particulières (arithmétique) vers des situations généralisables (modélisation et algèbre). C'est à partir de ce que voit et perçoit l'élève, qu'il ou elle est amené à étudier des relations mathématiques où intervient de plus en plus un raisonnement algébrique ou une pensée algébrique (Greenes et Findell, 1999, p. 127-137, traduction libre; Radford et Demers, 2004, p. 81-86). Contrairement à l'apprentissage naturel des nombres, l'apprentissage du raisonnement algébrique requiert un effort supplémentaire de la part de l'apprenant ou de l'apprenante (Devlin, 2010, p. 163-177). Il n'est donc pas surprenant que les élèves aient tendance à utiliser un raisonnement arithmétique pour résoudre des problèmes algébriques. D'où l'importance d'assurer une transition entre le raisonnement arithmétique et le raisonnement algébrique. Cette transition est possible avec l'aide de l'enseignant ou l'enseignante ou des pairs.

Dans la recherche d'une définition de ce qu'est le raisonnement algébrique, plusieurs auteurs privilégient une perspective que chacun juge essentielle en algèbre. En voici trois exemples qui reflètent trois perspectives différentes :

- *L'algèbre est quelquefois définie comme la généralisation de l'arithmétique ou comme un langage pour généraliser l'arithmétique. Mais l'algèbre c'est plus qu'un ensemble de règles pour manipuler des symboles, c'est une manière de penser* (Vance, 1998, p. 282, traduction libre).

- *L'algèbre est un langage. Ce langage comprend entre autres : les relations, les inconnues et les variables, ainsi que la généralisation des régularités. Chaque fois qu'une de ces idées est discutée, que ce soit à la maternelle ou à un autre niveau, c'est une occasion de travailler le langage de l'algèbre* (Usiskin, 1997, p. 346, traduction libre).

- *L'algèbre peut être un outil puissant pour résoudre des problèmes. Elle permet d'accéder à des solutions beaucoup plus facilement. […] Elle peut devenir un outil indispensable pour représenter et résoudre des situations complexes du monde qui nous entoure* (Baroody et Coslick, 1998, p. 16-3, traduction libre).

D'autre part, selon Van de Walle et Lovin (2008, p. 288), « le raisonnement algébrique fait appel à la capacité d'analyser, de représenter et de généraliser des modèles et des régularités dans tous les aspects des mathématiques. »

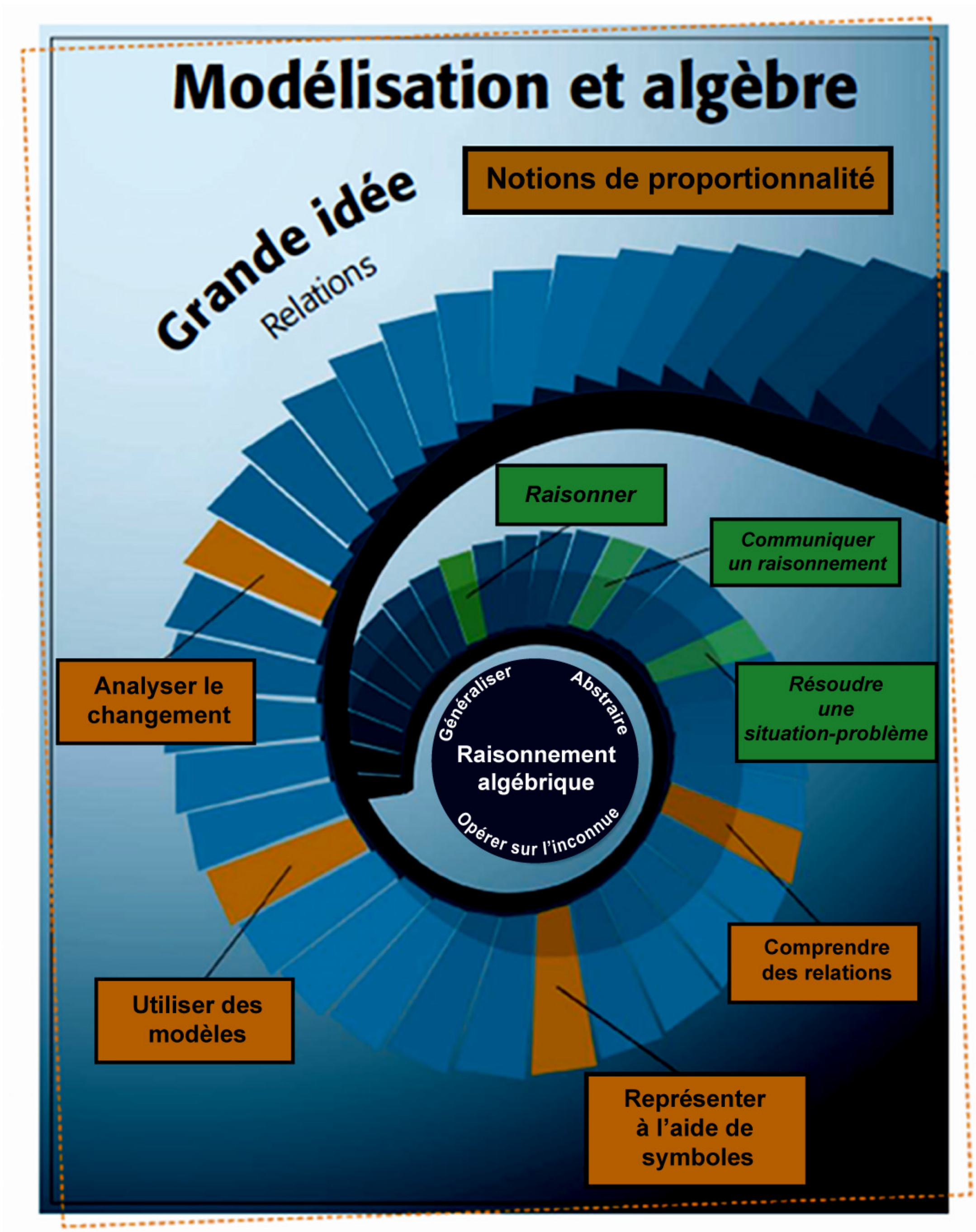
Parmi les nombreux éléments qui contribuent à l'efficacité de l'enseignement des concepts algébriques, certains ont une incidence plus grande sur le développement du raisonnement algébrique. Ainsi, il est important de reconnaître particulièrement les éléments suivants :

• les processus fondamentaux pour accéder à des niveaux d'abstraction supérieurs (abstraction, généralisation, opération sur l'inconnue et sur les variables);

• les habiletés mathématiques développées selon une perspective algébrique (raisonner, résoudre une situation-problème et communiquer un raisonnement);

• les composantes de l'apprentissage des concepts algébriques (comprendre des relations, utiliser des symboles algébriques, utiliser des représentations pour modéliser une relation en situation, avoir recours à un raisonnement proportionnel).

L'illustration suivante représente l'interaction entre ces éléments. Par la suite, chaque élément est expliqué plus en détail.



PROCESSUS FONDAMENTAUX

Dans une classe de mathématiques visant à développer le raisonnement algébrique chez les élèves, l'objectif traditionnel de l'enseignement, apprendre à calculer et à résoudre des équations, n'est pas omis; il est largement dépassé. Au **cycle moyen**, le développement du raisonnement algébrique repose sur trois processus fondamentaux: abstraire, généraliser et opérer sur l'inconnue.

Au **cycle intermédiaire,** on poursuit le développement du raisonnement algébrique en mettant en pratique dans des situations de plus en plus complexes les processus d'abstraction, de généralisation, et d'opération sur l'inconnue et sur les variables. Dans ce contexte, le raisonnement inductif et le raisonnement déductif sont nécessaires pour résoudre les situations-problèmes.

Le **raisonnement inductif** permet d'établir des règles ou des régularités à partir d'observations. Une règle est une modélisation qui découle des observations faites sur une suite de figures, d' objets ou de nombres, et qui permet de déterminer le résultat correspondant à la n^e figure, au n^e objet ou au n^e nombre. Dans un raisonnement inductif, on commence par des observations et des mesures spécifiques, on cherche des modèles et des régularités, on formule des hypothèses et on en tire des conclusions ou des lois générales (Sousa, 2010). Le raisonnement inductif part des parties vers le tout ou du spécifique au général.

Selon Sousa (2010), le **raisonnement déductif** tire des conclusions en se basant sur des principes qui sont déjà connus ou qui font l'objet d'hypothèses. À la différence du raisonnement inductif qui sert à découvrir une régularité, le raisonnement déductif sert à prouver que la régularité se vérifie en tout point. On peut alors amener l'élève à décrire la suite en utilisant cette régularité, ensuite à vérifier la vraisemblance de la régularité dans les autres figures et en tout point.

Le **raisonnement inductif** part du spécifique au général alors que le **raisonnement déductif** sert à tirer des conclusions du général au spécifique.

C'est par le raisonnement que l'élève parvient à donner un sens aux mathématiques et à penser logiquement. Dans certaines activités, l'élève effectuera un raisonnement inductif en émettant une généralisation suite à différentes observations notées lors d'une activité d'exploration. Dans d'autres activités, l'élève effectuera un raisonnement déductif en se basant sur des connaissances déjà acquises et en faisant preuve de logique pour arriver à une conclusion.

(Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a, p. 19)

Abstraction

Selon des recherches effectuées sur le cerveau, l'apprentissage de l'algèbre présente un défi supplémentaire à celui de la numération en raison du processus d'abstraction qui les différencie (Devlin, 2010, p. 163-177). En effet, l'abstraction est une des caractéristiques fondamentales du raisonnement algébrique. Elle est un processus par lequel l'élève mobilise des idées déjà acquises et arrive, à l'aide du langage, des symboles et d'artefacts culturels, à faire des liens qu'il ne faisait pas auparavant et à constituer ainsi une nouvelle idée (Radford, Demers et Miranda, 2009, p. 7). Abstraire, c'est se détacher de l'aspect sensoriel des choses pour raisonner à un niveau plus général. (Raynal et Rieunier, 2003, p. 13, adaptation). C'est se représenter mentalement une situation concrète, c'est passer à un niveau de conceptualisation plus profond. Pour sa part, Roegiers (2000, p. 77) explique que l'appropriation d'un concept généralise la réalité. Le concept se situe donc sur un autre plan que la réalité.

En Modélisation et algèbre (7^{e} et 8^{e} année) et en Relations (9^{e} année), le processus d'abstraction est surtout relié à celui de la généralisation.

Généralisation

L'une des grandes forces du cerveau humain se caractérise par la reconnaissance de régularités, de similarités ou de différences (Devlin, 2010, p.163-177). Cette reconnaissance est essentielle pour abstraire et généraliser. Dans la recherche d'une définition de ce qu'est la généralisation, plusieurs auteurs privilégient une perspective différente. En voici deux exemples :

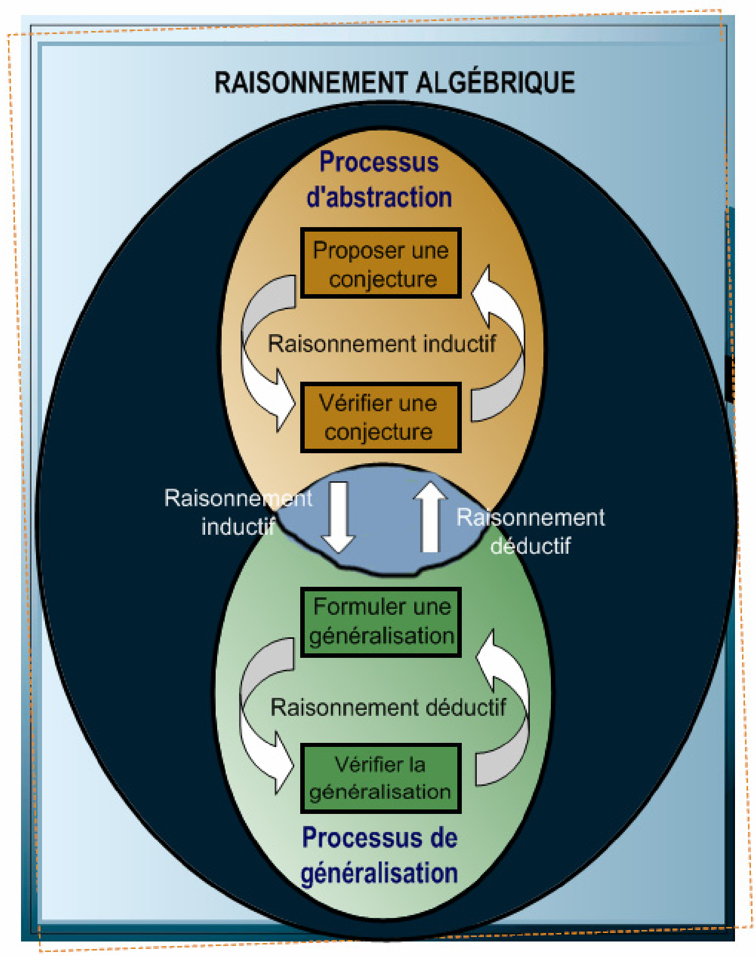
- Généraliser, c'est tirer des conclusions valables, vraies dans tous les cas, à partir de l'observation et de l'analyse de quelques exemples (Squalli, 2002, p. 9, adaptation). Il s'agit de raisonner par généralisation, en allant du particulier au général.

- Généraliser *[…] est particulièrement important, car chez l'homme, il est à la base de l'acquisition des concepts et des possibilités d'abstraction (Raynal et Rieunier, 2003, p. 156).* La généralisation est alors au cœur de l'activité mathématique.

En *Modélisation et algèbre* (7e et 8e année) et en *Relations* (9e année), elle permet de développer le raisonnement algébrique de l'élève.

Une **conjecture** est l'expression d'une idée perçue comme étant vraie dans toute situation semblable.

Le schéma ci-contre illustre les processus du raisonnement algébrique. Pour arriver à une généralisation, l'élève observe et analyse des situations pour ensuite proposer des conjectures. En proposant une conjecture, il ou elle doit être en mesure d'exprimer son raisonnement inductif à l'oral ou à l'écrit. L'élève doit ensuite vérifier si sa conjecture est valable dans d'autres situations. Il ou elle appuie ses conjectures au moyen de représentations concrètes et semi-concrètes et d'arguments mathématiques pour en déterminer une équation. L'élève utilise ensuite son équation pour vérifier si elle est applicable en tout temps. Ce processus d'abstraction (proposition et vérification de conjectures), parfois informel, permet à l'élève d'apprendre à formuler plus clairement ses généralisations.



Au **cycle moyen**, les élèves sont amenés à observer les changements dans le monde qui les entoure, à les décrire et à les représenter d'abord de façon concrète et semi-concrète, puis de façon symbolique toujours à partir de situations visuelles. Dans une suite de figures (suites non numériques à motif croissant), les élèves apprennent à décrire la régularité que l'on peut voir d'une figure à l'autre, à exprimer la relation entre le numéro de la figure et le nombre de points qui la composent et à représenter cette relation par une table de valeurs et par une équation.

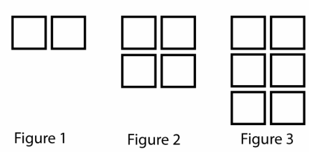
L'utilisation du raisonnement inductif se poursuit au **cycle intermédiaire**. Contrairement au cycle moyen, pour généraliser une situation, l'élève à l'intermédiaire part de ce qu'il ou elle voit et perçoit pour prolonger une suite de figures ou une suite numérique jusqu'au $n^{ième}$ terme sans avoir recours à une représentation concrète ou semi-concrète.

L'utilisation, par l'élève, de matériel concret et semi-concret facilite l'application des processus d'abstraction et de généralisation. Elle doit se poursuivre jusqu'à ce que l'élève soit habile avec ces processus. L'enseignant ou l'enseignante doit amener l'élève à généraliser à partir de plusieurs situations visuelles (p. ex., tuiles géométriques, jetons bicolores, cure-dents, illustrations) et variées afin de développer le raisonnement algébrique chez l'élève. Il est important de respecter le développement de l'élève en privilégiant le passage progressif des suites visuelles (concret ou semi-concret) aux suites numériques (abstrait), puis des suites aux situations en changement pour terminer avec la collecte de données lors d'une expérience.

Exemple de généralisation à partir d'une suite de figures

Les élèves étudient la relation entre le numéro des figures dans la suite ci-dessous et le nombre de tuiles qui les composent. Voici deux **propositions de conjectures** possibles :

- L'élève A propose que le nombre de tuiles dans chaque figure est toujours deux de plus que dans la figure précédente.
- L'élève B propose que le nombre de tuiles est toujours deux fois le numéro de la figure.



Numéro de la figure	1	2	3	...
Nombre de tucommentiles	2	4	6	...

Pour **vérifier sa conjecture**, l'élève A peut vérifier que la figure 2 a bien 2 tuiles de plus que la figure 1 et que la figure 3 a bien 2 tuiles de plus que la figure 2. Sa conjecture l'autorise à prédire qu'à la 4^e figure, il y aura 2 tuiles de plus que 6, soit 8 tuiles et peut le vérifier en construisant la figure 4.

L'élève B peut vérifier sa conjecture en vérifiant que la figure 1 contient 2 colonnes de 1 tuile (soit 2 × 1 tuile), que la figure 2 contient 2 colonnes de 2 tuiles (soit 2 × 2 tuiles) et que la figure 3 contient 2 colonnes de 3 tuiles (soit 2 × 3 tuiles). Cette conjecture lui permet de prédire qu'à la 4^e figure, il y aura 8 tuiles (soit 2 × 4 tuiles) et que la figure 20 contiendra 40 tuiles (soit 2 × 20 tuiles). La construction de la 4^e figure et d'autres figures subséquentes permettent d'appuyer leur conjecture. Notons que la conjecture doit être revue si on découvre un contre-exemple.

On remarque que le niveau d'abstraction est différent d'un ou une élève à l'autre. L'élève A se réfère à la 4e figure de la suite pour généraliser. Cette figure peut facilement être représentée à l'aide de matériel de manipulation ou d'un dessin. Par contre, l'élève B prolonge la suite en ayant recours à des figures qu'il ou elle ne peut représenter. L'élève B va au-delà de ce qui peut être tangible, ce qui démontre un degré d'abstraction plus élevé que l'élève A.

Reconnaissant que leur conjecture semble s'appliquer à toutes les situations similaires dans un contexte donné, les élèves **formulent leur généralisation** en ayant recours à des mots ou à l'aide de symboles. Dans l'exemple précédent, L'élève A peut formuler sa généralisation en disant : « Le nombre de tuiles qui composent une figure est toujours 2 de plus que le nombre de tuiles qui composent la figure précédente ». L'élève B peut formuler sa généralisation de façon symbolique au moyen de l'équation $n = f \times 2$, où f est le numéro de la figure et n, le nombre de tuiles qui la composent. Il ou elle vérifie ensuite si cette généralisation est applicable aux figures présentes dans la suite et celles prédites.

Pour faciliter l'observation d'une régularité dans des suites de figures, l'élève peut utiliser des couleurs, souligner, encercler ou encadrer le motif ou les motifs de base qu'il ou elle trouve dans chaque figure afin de généraliser des relations. Celles-ci qui sont souvent des régularités constantes se retrouvent au **cycle moyen** et au **cycle intermédiaire** dans des suites arithmétiques. Les suites géométriques sont à l'étude au **cycle supérieur**.

Pour développer le processus de généralisation chez l'élève, l'enseignant ou l'enseignante modélise le raisonnement algébrique, puis guide l'élève à formuler et à vérifier plusieurs conjectures. Le travail en dyade favorise le développement du raisonnement algébrique. En demandant de déterminer plus d'une généralisation par situation, on développe ainsi la flexibilité (Greenes et al., 1999) et la créativité (une des compétences du XXIe siècle) de l'élève. L'échange mathématique offre une autre occasion de développer la flexibilité chez l'élève en remarquant qu'il existe plus d'une stratégie possible. Selon le Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la maternelle à la 6e année (2006), cet échange permet à l'élève *de valider ses stratégies, de dégager de nouvelles idées et de fournir des indices à celui et à celle qui ne sait pas par où commencer* (p. 13).

Opération sur l'inconnue et sur les variables

Opérer sur l'inconnue, c'est traiter et examiner ce qui est inconnu. C'est raisonner de manière analytique, c'est réfléchir sur les opérations, les généralisations et non sur les objets (Squalli et Theis, 2005, p. 5, adaptation). Selon plusieurs chercheurs, c'est ce qui distingue l'algèbre de l'arithmétique (Driscoll, 1999, p. 1; Squalli, 2002, p. 8). Les notions d'inconnues et de variables sont généralement représentées de façon symbolique par des lettres. Toutefois, dans bien des situations, elles peuvent l'être par d'autres symboles (p. ex., un carré, un point d'interrogation, un trait à remplir) ou du matériel concret. Elles peuvent aussi être exprimées par des mots.

Selon Small (2010), l'élève est exposé au raisonnement algébrique dès le **cycle primaire** lorsqu'il ou elle doit résoudre des équations comme 5 + 4 = ■ ou 11 – ■ = 7. Bien qu'il n'y ait pas de lettres dans ces équations, il n'en demeure pas moins que les cases représentent des inconnues ou des variables. Le passage de l'utilisation des cases (■) à celle des lettres se fait progressivement à partir du **cycle moyen**. L'utilisation de lettres dans des buts différents (à titre d'inconnue ou de variable) peut créer de la confusion chez l'élève.

Variable
En mathématiques, une variable est un élément qui peut prendre des valeurs différentes à l'intérieur d'un ensemble, d'un système, d'une relation.

(Le Petit Larousse Illustré, 2008)

Inconnue
Dans un problème, l'inconnue est l'objet à déterminer ou la quantité que l'on cherche à partir d'informations suffisantes.

(De Champlain, Mathieu, Patenaude et Tessier, 1996)

Saisir le sens du symbole qui représente une inconnue ou une variable exige un haut niveau d'abstraction. De plus, apprendre à déterminer les valeurs manquantes dans des équations constitue une étape importante dans le développement du raisonnement algébrique.

Même si les inconnues et les variables représentent toutes deux des valeurs manquantes dans une équation, ce ne sont pas des synonymes. Le tableau suivant apporte quelques précisions à ce sujet.

> *Les variables constituent un excellent outil pour exprimer les régularités observées en mathématiques. Elles permettent d'utiliser les symboles mathématiques pour aider à réfléchir et à saisir certaines idées mathématiques, de la même façon qu'on se sert d'objets concrets et de dessins.*
>
> (Van de Walle et Lovin, 2008, p. 297).

Inconnue	Variable
Terme non connu dans une équation. (Ministère de l'Éducation, 2005a, p. 96) • On retrouve une *inconnue* dans une équation à résoudre qui traduit une relation d'égalité. **Exemple** Dans l'équation 10 = 17 − *c, c* est une inconnue dont la valeur n'est pas encore déterminée. On pourra déterminer lors de la résolution de problème que *c* = 7. *Notes* : 1. Par convention, si le même symbole est utilisé plus d'une fois dans une équation ou une situation, la valeur qu'il représente est la même. Par exemple, dans l'équation *b* + *b* + *b* = 18, on peut conclure que *b* = 6, puisque 6 + 6 + 6 = 18. 2. Au **cycle intermédiaire** (en 10^e année), des équations dont *l'inconnue* peut avoir plus d'une valeur seront à l'étude. Par exemple, dans l'équation $x^2 = 36$, l'inconnue peut avoir une valeur de 6 ou de -6.	*Terme indéterminé dans une équation ou une inéquation qui peut être remplacé par plusieurs valeurs*. (Ministère de l'Éducation, 2005a, p. 101) • On retrouve des *variables* dans une équation qui représente une relation entre deux quantités changeantes. **Exemple 1 – Suite non numérique** L'équation *p* = 2*n* + 1 représente la relation entre le numéro *n* de la figure dans une suite non numérique et le nombre *p* de points qui la composent. *Note* : Dans l'exemple ci-dessus, la valeur de la variable *n* (variable indépendante) influe sur la valeur de la variable *p* (variable dépendante). • On retrouve des *variables* dans une formule. **Exemple 2 – Aire d'un rectangle ou d'un parallélogramme** *A* = *b* × *h* • On retrouve des *variables* dans une équation qui généralise une relation d'égalité. **Exemple 3 – Propriété de la commutativité de la multiplication** *a* × *b* = *b* × *a* *Note* : Dans une équation, il est possible que deux variables différentes prennent la même valeur en même temps. Par exemple, dans l'équation *a* + *b* = 6, si *a* prend la valeur de 3, *b* aura aussi la valeur 3.

L'algèbre commence par la prise de conscience des opérations, opérations dans le sens large du mot, c'est-à-dire une série d'actes intellectuels supposant réflexion et combinaison de moyens en vue d'obtenir un résultat ou de résoudre un problème. L'algèbre est […] *présentée comme une « arithmétique généralisée », comme un outil de résolution de problèmes plus puissant que l'arithmétique* (Squalli et Theis, 2005, p. 5).

HABILETÉS MATHÉMATIQUES

> *Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques ne peut logiquement se faire que si l'on communique avec le langage mathématique et le raisonnement mathématique s'exerce le plus généralement en situation de résolution de situations-problèmes.*
>
> *(Ministère de l'Éducation du Québec, 2001, p. 125)*

Le raisonnement algébrique des élèves se développe en relation avec le développement d'habiletés mathématiques. Ainsi, les élèves doivent développer leur habileté à raisonner et à résoudre des problèmes de façon algébrique, puis à communiquer leur raisonnement algébrique.

Habileté à raisonner de façon algébrique

> *Raisonner […] c'est faire des inférences. Et faire des inférences, c'est penser d'une certaine manière : c'est produire de l'information nouvelle à partir d'informations existantes.*
>
> *(Raynal et Rieunier, 2003, p. 315)*

> *L'algèbre est la pensée logique sur les nombres; l'arithmétique est le calcul avec les nombres.*
>
> (Devlin, 2010, p. 173, traduction libre)

L'habileté à raisonner de façon algébrique permet aux élèves d'examiner des situations et d'organiser leur pensée. Alors que l'arithmétique est généralement perçue comme un calcul sur des quantités connues, visant à trouver la bonne réponse, le raisonnement algébrique vise à mieux comprendre la numération en permettant d'analyser les relations entre les nombres pour trouver la valeur d'une inconnue.

Selon Driscoll (1999, pp. 1-19), le raisonnement algébrique inclut l'habileté à « faire et défaire », l'habileté à créer des règles pour représenter des relations entre deux quantités en changement et l'habileté à formuler des généralisations au sujet des propriétés des opérations arithmétiques.

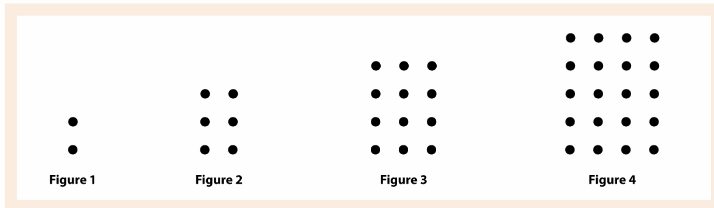
L'habileté à « faire et défaire » se manifeste lorsque les élèves réussissent à procéder à rebours. Ils peuvent, par exemple, faire appel aux liens entre l'addition et la soustraction, et entre la multiplication et la division. Étant donné l'équation x + 3 = 11, l'élève qui peut procéder à rebours comprend que l'on peut soustraire 3 de la somme (11 – 3 = 8) pour déterminer la valeur de l'inconnue, car on a ajouté 3 à l'inconnue pour obtenir une somme de 11. Il s'agit d'un raisonnement algébrique puisque l'action est effectuée en fonction d'une réflexion et d'une compréhension, et non d'une procédure pour laquelle l'élève ne peut en expliquer le sens.

Selon Van de Walle et Lovin (2008, p. 288), « On emploie fréquemment l'expression raisonnement algébrique ou pensée algébrique pour désigner la façon dont les élèves utilisent certains concepts de l'algèbre (régularités, relations, fonctions, représentations) pour comprendre toutes sortes de situations mathématiques et les exprimer. »

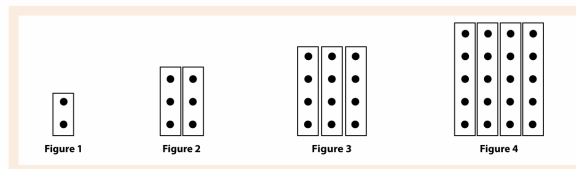
> **Fonction**
> *Une fonction est une relation, ou une règle, qui définit comment la première variable, dite indépendante, influe sur une seconde variable, dite dépendante.*
>
> (Van de Walle et al., 2008, pp. 308-309)

L'habileté à créer des règles pour représenter des relations fait appel à l'habileté à généraliser à partir de régularités, ce qui constitue un processus fondamental du raisonnement algébrique. L'élève commence par observer une suite arithmétique (de figures ou de nombres) ou une situation en changement pour en déduire la régularité. À partir de cette régularité, il ou elle prolonge la suite à l'aide de dessins ou d'une table de valeurs afin de déterminer la relation algébrique qui vérifie la régularité en tout point. L'élève poursuit son apprentissage des relations à partir de situations en changement où il ou elle utilise une régularité pour construire une table de valeurs, pour prédire le $n^{\text{ième}}$ terme ou, pour formuler une équation. Ces genres d'exercices illustrent bien le concept de **la fonction**, notion fondamentale des mathématiques (Van de Walle et Lovin, 2008) enseignée de façon explicite à partir de la 9e année.

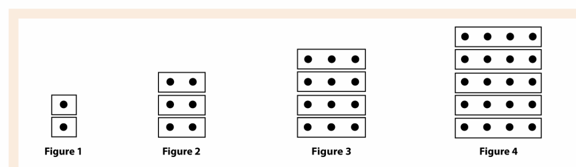
Par exemple, étant donné la suite de figures ci-après, on peut relever diverses méthodes de raisonnement des élèves pour déterminer la relation entre le nombre de points (*p*) et le numéro de la figure (*n*).



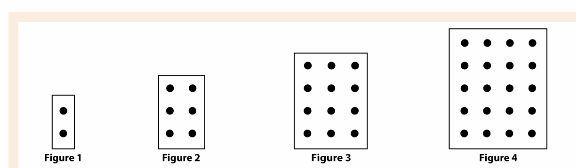
- Un élève qui raisonne algébriquement peut reconnaître que la figure 1 est composée de 1 colonne de 2 points, que la figure 2 est composée de 2 colonnes de 3 points, que la figure 3 est composée de 3 colonnes de 4 points, et ainsi de suite. Il ou elle utilise alors cette régularité pour déterminer le nombre de points compris dans la figure 5, 10, 100, …, *n*. Ainsi, il ou elle peut généraliser et représenter la relation entre le nombre de points (*p*) et le numéro de la figure (*n*) par l'équation $p = n \times (n + 1)$.



- Un autre élève qui raisonne algébriquement peut reconnaître que la figure 1 est composée de 2 rangées de 1 point, que la figure 2 est composée de 3 rangées de 2 points, que la figure 3 est composée de 4 rangées de 3 points, et ainsi de suite. Il ou elle utilise alors cette régularité pour déterminer le nombre de points compris dans la figure 5, 10, 100, …, *n*. Ainsi, il ou elle peut généraliser et représenter la relation entre le nombre de points (*p*) et le numéro de la figure (*n*) par l'équation $p = (n + 1) \times n$.



- Un autre élève qui raisonne algébriquement peut reconnaître que les figures 2, 3 et 4 sont des rectangles composés de points. Il ou elle reconnaît que la figure 2 a une base de longueur de 2 points et une hauteur de 3 points, que la figure 3 a une base de longueur de 3 points et une hauteur de 4 points, que la figure 4 a une base de longueur de 4 points et une hauteur de 5 points, et ainsi de suite. Il ou elle utilise alors cette régularité pour déterminer le nombre de points compris dans la figure 5, 10, 100, …, *n*. Ainsi, il ou elle peut généraliser et représenter la relation entre le nombre de points (*p*) et le numéro de la figure (*n*) par l'équation $p = n \times (n + 1)$.



Ces trois représentations symboliques sont équivalentes, mais représentent une idée en soi. En développant le raisonnement algébrique des élèves, on leur permet de voir et d'analyser des situations plus générales et de développer leur répertoire de stratégies de résolution de problèmes. Il est donc important de ne pas avoir recours à l'utilisation de règles avant que l'apprenant ou l'apprenante ait développé un **raisonnement algébrique** à partir de l’analyse de suites de figures ou d’une situation en changement. Cette stratégie est aussi très utile à l’introduction de la notion de fonction (Van de Walle et Lovin, 2008).

Pour stimuler le raisonnement algébrique des élèves, l’enseignant ou l’enseignante peut ensuite utiliser un problème arithmétique existant et lui donner une perspective algébrique en ajoutant une situation en changement. Ces situations favorisent la recherche de régularités et de relations, l’utilisation de variables et d’inconnues ainsi que l’expression de justifications (argument mathématique), de conjectures et de généralisations.

Le tableau suivant fait ressortir la différence entre un problème qui suscite un raisonnement arithmétique et un problème qui suscite un raisonnement algébrique.

<table>
<tr><th>Raisonnement arithmétique</th><th>Raisonnement algébrique</th></tr>
<tr><td>On travaille à partir d’une situation statique.

Exemple
Renée doit débourser 5 $ plus 3 $ par heure pour la location d’un vélo. Pendant combien d’heure pourra-t-elle louer ce vélo si elle dispose de 35 $?</td>
<td>On travaille à partir d’une situation en changement.

Exemple
Renée doit débourser 5 $ plus 3 $ par heure pour la location d’un vélo. On s’intéresse à la relation entre le nombre d’heures de location et le coût de location.
a) Représente la relation par une table de valeurs.
<table>
<tr><th>Nombre d’heures</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>Coût ($)</td><td>8</td><td>11</td><td>14</td><td>17</td></tr>
</table>
b) Décris la situation entre le nombre d’heures et le coût de location.
c) Combien coûte une location de 6 heures?
d) Si Renée dépense 14 $, pendant combien de temps a-t-elle loué le vélo?
e) Si elle dispose de 35 $, pendant combien d’heures peut-elle louer un vélo?</td></tr>
<tr><td>Note :
Ce problème présente une situation statique qui n’admet qu’une seule réponse déterminée à l’aide d’opérations arithmétiques.</td>
<td>Note :
Ce problème présente une situation en changement qui porte sur l’étude de régularités et de la relation entre deux quantités en changement.</td></tr>
</table>

Bref, la capacité de raisonner algébriquement ne se développe pas de façon simple et naturelle. Il importe que l'enseignant ou l'enseignante fasse cheminer les élèves en les incitant :

- à expliciter leur raisonnement;
- à travailler à rebours;
- à analyser les liens entre les quantités et à organiser l'information pour représenter une situation d'une autre façon;
- à proposer des conjectures, à les vérifier et à généraliser;
- à s'impliquer dans la prise de décision quant au matériel à utiliser (p. ex., matériel de manipulation, matériel semi-concret, calculatrice à affiche graphique) et au choix de stratégies pour résoudre un problème;
- à développer leur créativité mathématique;
- à travailler en coopération (dyade, équipe, etc.);
- à participer à des échanges mathématiques;
- à repérer des erreurs et à les corriger au moyen de la rétroaction descriptive (où, quand, quoi, comment, pourquoi, ce qui est bien fait, ce qui est un défi pour l'élève, prochaine étape, …).

Lorsque les élèves **raisonnent algébriquement,** ils analysent les nombres, les symboles, les quantités et les opérations, et ensuite ils généralisent.

Dans le cadre de situations d'apprentissage, l'enseignant ou l'enseignante doit poser des questions qui mettent l'accent sur des concepts algébriques et qui amènent les élèves à réfléchir. Ces questions peuvent être autant de style ouvert que fermé. En voici quelques exemples :

- « Est-ce que ça fonctionne si je fais la même chose avec d'autres nombres? »
- « Qu'est-ce qui change? Qu'est-ce qui ne change pas? »
- « Comment puis-je prédire le résultat ou prendre des raccourcis sans faire tous les calculs? »
- « Est-ce que l'information recueillie me permet de prédire le résultat? »
- « Suis-je capable de créer une situation en changement? »
- « Est-ce que la régularité peut être appliquée à n'importe quel cas? »
- « Est-ce qu'on utilise toujours les mêmes étapes ou la même règle? Quelles sont-elles? »
- « Est-ce qu'il existe d'autres façons de généraliser la situation? Quelles sont-elles? »

Habileté à résoudre une situation-problème de façon algébrique

> *Résoudre un problème ou une énigme c'est trouver une réponse satisfaisante à la question qui est posée par son énoncé.*
>
> (Baruk, 1995, p. 1087)

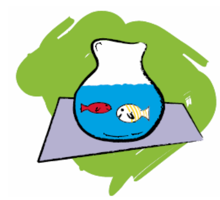
> *La compétence à résoudre des situations-problèmes est une démarche de l'esprit exploitée dans un très large éventail de situations. Sur le plan pratique, on y a spontanément recours pour trouver réponse à différents défis de la vie quotidienne. Sur le plan plus abstrait, elle s'avère un outil intellectuel puissant au service du raisonnement et de l'intuition créatrice.*
>
> (Ministre de l'Éducation du Québec, 2001, p. 126)

Situation-problème

Dans ce document, une situation-problème désigne un problème qui :
- est en contexte;
- permet d'utiliser différentes stratégies;
- représente un défi pour l'élève.

La résolution d'une situation-problème vise à engager les élèves dans un processus où ils peuvent utiliser différentes stratégies. Ceux et celles qui ont développé des stratégies ont plus de facilité à amorcer la résolution d'une situation-problème, à anticiper et à prédire des résultats, à raisonner et à trouver une solution.

Voici un exemple d'une situation-problème qui peut être résolue de façon arithmétique ou algébrique.



Laura a 15 poissons rouges et 18 poissons à rayures jaunes. Jean-Stéphane a le même nombre de poissons, mais seulement 14 de ses poissons sont rouges. Combien Jean-Stéphane a-t-il de poissons à rayures jaunes?

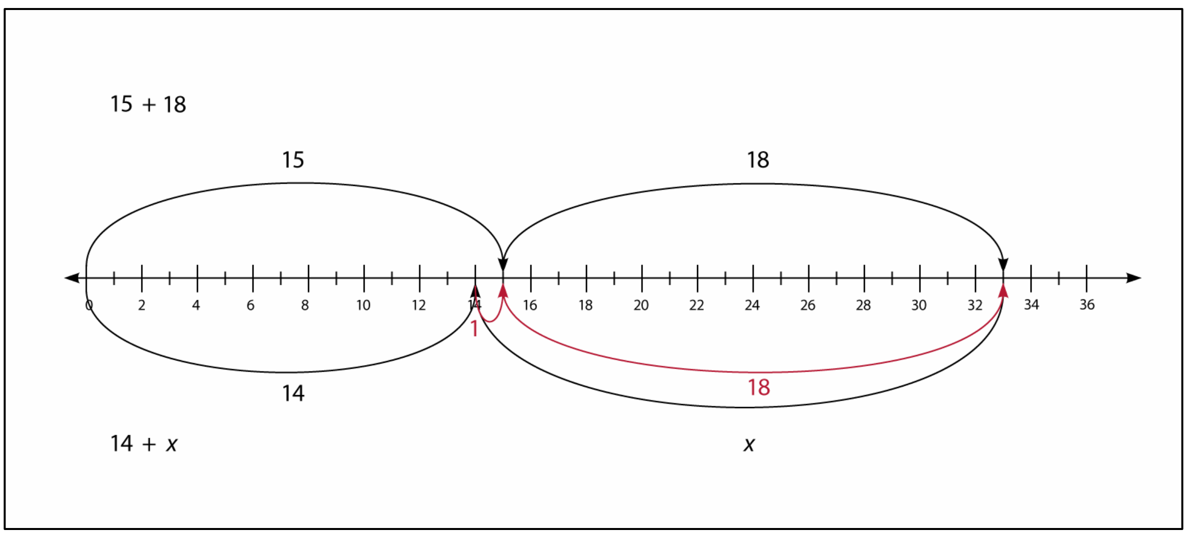
Résolution à l'aide d'un raisonnement arithmétique	Résolution à l'aide d'un raisonnement Algébrique
Je sais que Laura a 33 poissons en tout, car 15 plus 18, c'est 33. 15 + 18 = 33 Jean-Stéphane a le même nombre de poissons. Alors, s'il a 14 poissons rouges, il en a 19 qui ont des rayures jaunes, car 33 moins 14, c'est 19. 33 – 14 = 19 On effectue des opérations arithmétiques pour résoudre le problème.	Je sais que Laura et Jean-Stéphane ont le même nombre de poissons. 15 + 18 = 14 + x Si Laura a 15 poissons rouges et Jean-Stéphane en a 14, alors Jean-Stéphane a 1 poisson rouge de moins que Laura. 15 + 18 = 14 + x -1 Puisque Jean-Stéphane a le même nombre de poissons que Laura, il doit avoir **1** poisson à rayures jaunes de plus que Laura. +1 15 + 18 = 14 + x -1 Donc x = 19.

	Donc, Jean-Stéphane a 19 poisons à rayures jaunes. Au lieu d'effectuer des calculs, on interprète le problème et on compare les quantités. On peut représenter la situation par une équation. Pour la résoudre, on compare les quantités de chaque côté du signe =. Le matériel de manipulation permet de faciliter la visualisation des quantités de chaque côté de l'égalité.

En général, les élèves sont portés à résoudre un tel problème de façon arithmétique.

L'enseignant ou l'enseignante peut alors varier les paramètres du problème en lui donnant une perspective algébrique, par exemple, en demandant aux élèves de représenter la situation-problème à l'aide d'une équation. Une autre méthode pour résoudre cette équation de manière semi-concrète est à l'aide d'une droite numérique, ce qui peut aider les élèves à *représenter* leur raisonnement et non à *faire* le calcul. L'important n'est pas d'effectuer un calcul, mais de bien saisir la **relation d'égalité** entre les deux expressions numériques.

Dans le cas de l'équation 15 + 18 = 14 + x vue précédemment, la représentation de la droite numérique pourrait être la suivante :

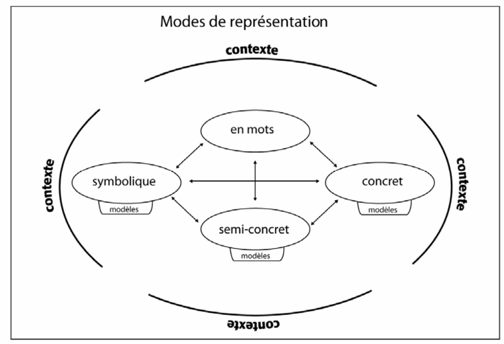


Habileté à communiquer un raisonnement algébrique

> *La communication bénéficie à tous ceux qui participent à l'échange […]. L'obligation de faire part de sa compréhension d'une situation ou d'un concept contribue souvent à l'amélioration ou à l'approfondissement de cette compréhension.*
>
> (Ministère de l'Éducation du Québec, 2001, p. 132)

L'habileté à communiquer un raisonnement algébrique se développe lorsque les élèves expriment leur compréhension d'une situation-problème ou d'un concept, et défendent leurs idées en utilisant différents **modes de représentation** :

- le mode **concret**, relié à l'exploration, à la manipulation et à la création à l'aide de matériel concret;
- le mode **semi-concret**, relié à une illustration, à un dessin, à une table de valeurs, à un graphique ou à toute autre représentation sur papier;
- le mode **symbolique**, relié à toute représentation faite à partir de chiffres et de symboles;
- le mode « **en mots** », relié à une explication ou à une description verbale ou écrite.



Afin d'acquérir une solide compréhension, les élèves doivent vivre des expériences en contexte en explorant des situations-problèmes. La mise en contexte permet aux élèves d'établir des liens entre diverses représentations et de développer une compréhension des concepts algébriques explorés.

L'enseignant ou l'enseignante utilise aussi diverses représentations afin d'aider les élèves à s'approprier les concepts mathématiques et à établir des liens entre les représentations.

Après avoir développé une bonne compréhension des concepts algébriques, l'élève doit être capable de partager sa compréhension en communiquant aux autres ce qu'il a compris. Pour ce faire, il peut utiliser plusieurs outils de communication en mathématiques, notamment l'argument et l'échange décrits ci-après.

Argument mathématiques :
Justification orale ou écrite d'un raisonnement dans le but de démontrer ou de réfuter une idée mathématique.

L'**argument mathématique** est un outil essentiel de communication en mathématiques. Les élèves doivent parvenir à justifier leurs représentations, leurs idées et leur compréhension à l'aide d'arguments mathématiques, en se servant d'un vocabulaire de relations causales (p. ex., *si… donc, parce que, puisque*). Les arguments mathématiques permettent aux élèves de présenter leur compréhension de façon beaucoup plus juste et réfléchie. Pour plus de renseignements à ce sujet, consulter le document intitulé *Communication et apprentissage : Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques* (Radford et Demers, 2004, p.15-25).

Exemple

Dans cet exemple, les élèves doivent déterminer le nombre de points de la figure 4, de la figure 10 et de la figure *n* de la suite ci-dessous. Le tableau qui suit rassemble divers arguments mathématiques proposés par les élèves.

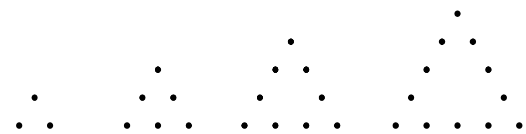
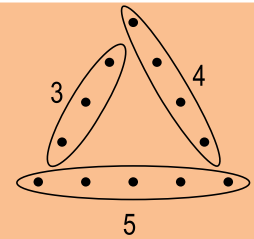


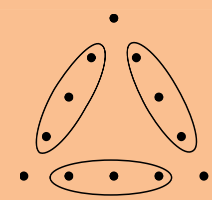
Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4

L'élève A justifie sa représentation de la relation entre le nombre de points et le numéro de la figure en disant : « À la figure 4, je vois 5 points en bas, puis 4 à droite et 3 à gauche. Donc, 5 + 4 + 3 est égal à 12. Donc, il y a 12 points dans la figure 4. Puisqu'on retrouve cette même régularité dans les autres figures, je l'utilise pour illustrer la figure 10. Je sais qu'il y aura 11 points en bas, puis 10 à droite et 9 à gauche. Donc, 11 + 10 + 9 est égal à 30. Puisque la régularité continue, je suppose qu'à la figure 100, il y aura 300 points, soit 101 + 100 + 99. Alors, la règle est $(n+1)+n+(n-1)$ où *n* représente le numéro de la figure. L'équation est $p = (n+1)+n+(n-1)$ où *p* est le nombre de points. »



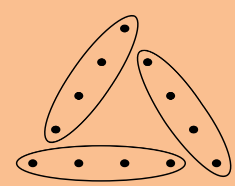
$p = (n+1)+n+(n-1)$

Un élève B justifie sa représentation de la relation entre le nombre de points et le numéro de la figure en disant : « Je vois 3 points aux sommets de la 4^{e} figure, en plus de 3 groupements égaux de 3 points entre les sommets donc, $3+3\times 3$ = 12 points. Pour la deuxième figure, je vois encore les 3 points aux sommets et 3 regroupements égaux de 1 point. À la figure 4, mes regroupements sont de 3 (numéro de la figure moins 1) et à la figure 2, mes regroupements sont de 1 point, ce qui est un de moins que le numéro de la figure. Pour la figure 1, je vois les 3 sommets et 0 regroupement de points (0 est 1 de moins que le numéro de la figure 1). Ceci me permets de conclure qu'il y a 30 points dans la figure 10, car il y a 3 sommets et 3 regroupements de 9 points ($3+3\times 9$ = 30 points). D'où l'équation est $p = 3+3\times(n-1)$, où *p* représente le nombre de points et *n* représente le numéro de la figure. »



$p = 3+3\times(n-1)$

Un élève C justifie sa représentation de la relation entre le nombre de points et le numéro de la figure en disant :« À la figure 1, je vois 3 groupes de 1 point alors qu'à la figure 2, je vois 3 groupes de 2 points. À la figure 3, il y a 3 groupes de 3 points et à la figure 4, 3 groupes de 4 points, donc 3 × 4 ou 12 points au total. Donc, le nombre de points total à la figure correspond à 3 groupes du nombre représenté par le numéro de la figure. J'ai représenté la figure 10 par 3 regroupements de 10 points, chacun. J'ai vérifié si je pouvais utiliser la même régularité pour compter le nombre de points et ça fonctionne. J'arrive à la conclusion que l'équation est bel et bien $p = 3\times n$, où *p* représente le nombre de points et *n* représente le numéro de la figure. »



$p = 3\times n$

Un élève D justifie sa représentation de la relation entre le nombre de points et le numéro de la figure en disant :

« Je vois 3 points à la première figure, 3 points de plus à la deuxième figure (donc 3 + 3 = 6) et 3 points de plus à la 3e figure que la figure précédente. C'est-à-dire, il y a 6 + 3 = 9 points au total à la figure 3. Je peux aussi l'écrire 3 + 3 + 3 = 9, ce qui me permets de faire un lien entre le numéro de la figure et le nombre de regroupements de 3. À la quatrième figure, je vois 4 regroupements de 3. Je peux donc déduire qu'à la 10e figure, il y a 10 regroupements de 3 points donc 30 points (3 x 10 = 30). Ceci me permet de conclure que la nième figure est composée de n groupes de 3. Alors, la règle est $p = 3 \times n$, où *p* représente le nombre de points et *n* représente le numéro de la figure. »

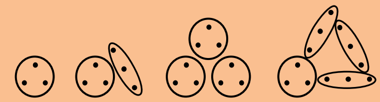


Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4

$$p = 3 \times n$$

L'échange mathématique est le moment idéal pour partager des représentations et des arguments mathématiques. Lorsque les élèves résolvent une situation-problème en algèbre, ils formulent des conjectures, présentent leurs pistes de solution, confrontent leurs idées ou justifient leurs résultats à l'aide de différentes représentations. Bref, ils communiquent. À la suite de ces échanges, l'enseignant ou l'enseignante peut intervenir auprès des élèves pour améliorer la communication à partir d'une rétroaction descriptive.

Selon Radford et Demers (2004, p. 32), « La maîtrise de l'argumentation mathématique est un processus très long dans le développement conceptuel de l'élève. Souvent, l'élève se contente d'appuyer et de valider ses arguments en ayant recours à la perception et à des exemples concrets. ».

Bref, l'habileté à communiquer un raisonnement algébrique au moyen d'un argument mathématique ne se développe pas de manière simple ou naturelle. Il importe à l'enseignant ou à l'enseignante d'offrir de nombreuses occasions de discussions mathématiques (entre l'enseignant ou l'enseignante et les élèves ou entre les élèves) et d'accorder le temps nécessaire pour que les élèves puissent construire une argumentation pertinente. Selon Radford et Demers (2004, p. 28), pour faire cheminer les élèves dans leur acquisition d'habiletés de communication mathématique, l'enseignant ou l'enseignante doit les inciter :

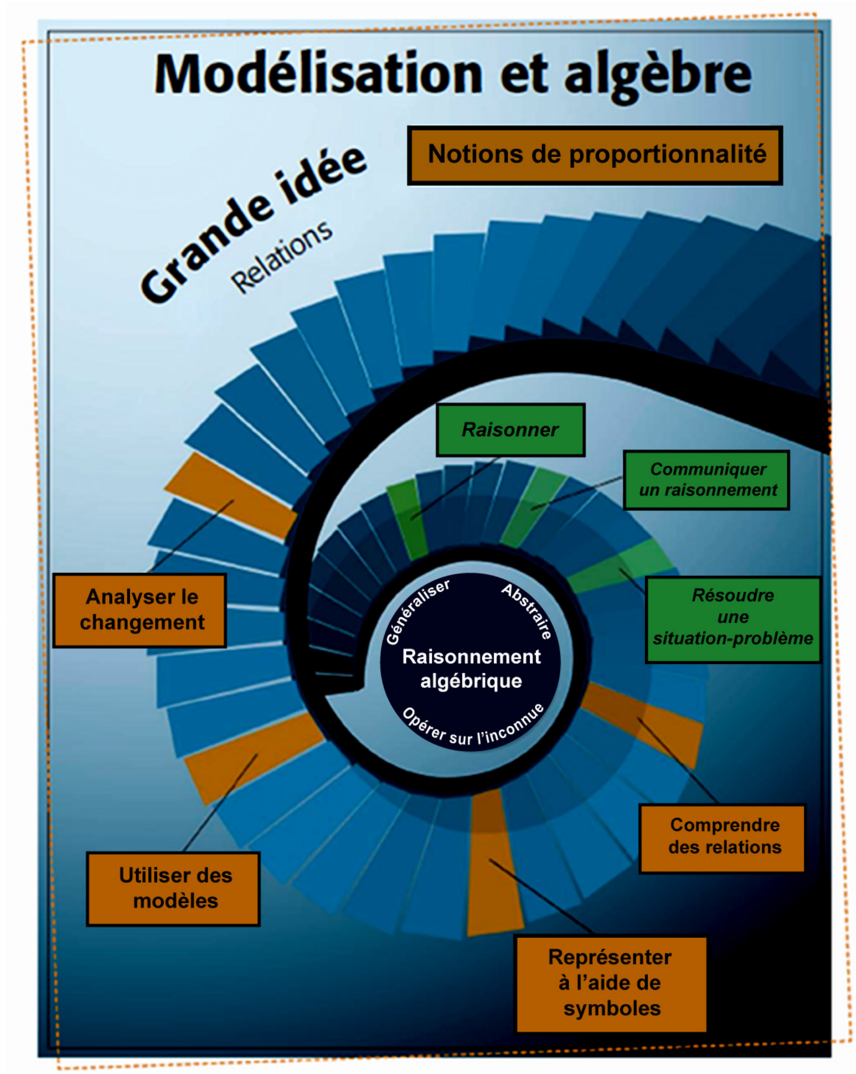
- à utiliser les conventions mathématiques appropriées au **cycle intermédiaire** (p. ex., symboles, représentations, terminologie);
- à écouter attentivement, à interpréter et à évaluer les arguments mathématiques des pairs;
- à exprimer un argument mathématique pertinent;
- à justifier les arguments mathématiques avancés;
- à communiquer ses connaissances avec exactitude, clarté et précision;
- à organiser logiquement et efficacement la présentation d'un résultat.

« Pour acquérir, à l'école, les connaissances que l'humanité a bâties au cours de millénaires, il faut plus qu'un bon cerveau : il faut une culture. […] Du point de vue de l'éducation, on ne peut pas tirer tout le potentiel de la plasticité du cerveau sans les conditions pédagogiques que la culture doit mettre en place pour assurer un plein développement chez l'élève. » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2009a).

Selon le Ministère de l'Éducation de l'Ontario (2009b, p. 19-21), « l'enseignant ou l'enseignante peut s'appuyer sur l'identité culturelle (franco-ontarienne) des élèves pour favoriser la motivation et permettre l'acquisition des connaissances. Ceci permet de créer des contextes permettant aux élèves de s'identifier et de faciliter leur compréhension des problèmes présentés. »

COMPOSANTES DE L'APPRENTISSAGE DES RELATIONS ET DES CONCEPTS ALGÉBRIQUES

Les composantes de l'apprentissage de l'algèbre sont les éléments fondamentaux que l'apprentissage en algèbre doit viser, peu importe l'année d'étude (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p. 37-40). Ces composantes font partie de la toile de fond des programmes-cadres de mathématiques de l'Ontario. Ainsi, dans le domaine *Modélisation et algèbre* (7e et 8e année), on doit reconnaître que l'on cherche à faire progresser les élèves dans leur apprentissage en les amenant à modéliser, à analyser et à interpréter des situations ***à l'aide de relations***, à utiliser des modèles mathématiques, à analyser le changement et à représenter des situations en changement à l'aide de symboles. Dans les domaines *Relations* et *Numération et algèbre* (9e année), on doit reconnaître que l'on cherche à faire progresser les élèves dans leur apprentissage en les amenant à modéliser, à analyser et à interpréter des situations ***à l'aide de fonctions affines***, à utiliser des représentations et des modèles mathématiques, à analyser le changement et à représenter des situations en changement à l'aide de symboles.



Chacune de ces composantes est abordée ci-après. Par la suite, une analyse d'une situation en changement est présentée de façon à illustrer l'intégration de ces composantes dans l'apprentissage en *Modélisation et algèbre* (7e et 8e année), *Relations* et *Numération et algèbre* (9e année).

Compréhension des relations

> ***Relation.*** *Énoncé mathématique qui décrit un lien entre divers objets ou variables.*
> (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a, p. 99)

> *Une fonction est une relation, ou une règle, qui définit comment la première variable, dite indépendante, influe sur une seconde variable, dite dépendante. Une fonction associe chaque élément d'un ensemble donné à un élément unique d'un autre ensemble.*
> (Van de Walle et Folk, 2005, traduction libre, pp. 308-309)

En *Modélisation et algèbre* (7e et 8e année) et *Relations* (9e année), comprendre des relations est une habileté importante en résolution de problèmes puisqu'elle permet l'appropriation de concepts, la formulation et la vérification de conjectures menant à des généralisations. Lorsque les élèves perçoivent et décrivent des régularités dans des suites numériques ou non numériques, ils comparent, représentent et créent des situations ou des suites à partir de régularités. Ceci leur permet de cheminer vers l'établissement de relations entre des quantités.

Au **cycle moyen**, les élèves explorent, pour la première fois, des relations entre des quantités en changement, particulièrement dans des situations présentées par des suites non numériques à motif croissant. Au **cycle intermédiaire**, les élèves poursuivent leur apprentissage en modélisant, en analysant et en interprétant des situations. Ils doivent être capables de représenter une situation en changement, d'analyser l'effet de changements sur une variable, puis d'utiliser différents modes de représentation pour résoudre un problème.

Voici un exemple d'une situation en changement :

> *Renée veut louer un vélo lors d'une visite touristique. Elle doit débourser 5 $ plus 3 $ par heure pour la location.*
>
> *On s'intéresse à la relation entre le nombre d'heures de location et le coût de location.*

En considérant cette situation, les élèves peuvent reconnaître le changement du montant à payer d'une heure à une autre. En encourageant l'analyse du changement, ceux-ci reconnaissent la relation entre le coût et le temps. Plus spécifiquement, ils pourront conclurent que le coût de location augmente lorsque le nombre d'heures de location augmente.

En **9e année**, les élèves sont initiés à la terminologie propre au concept de la fonction qui est une relation particulière définissant l'influence d'une première variable, dite indépendante, sur une seconde, dite dépendante. Les fonctions sont des outils mathématiques servant à modéliser des situations du monde réel.

À partir d'expériences réalisées en salle de classe, l'enseignant ou l'enseignante guide les élèves vers la découverte des caractéristiques d'une situation en changement. Les données recueillies peuvent être représentées par des tables de valeurs ou des graphiques. Ces expériences peuvent aussi faciliter des mises au point sur la précision des outils de mesure ainsi que l'erreur associée à la prise de mesures.

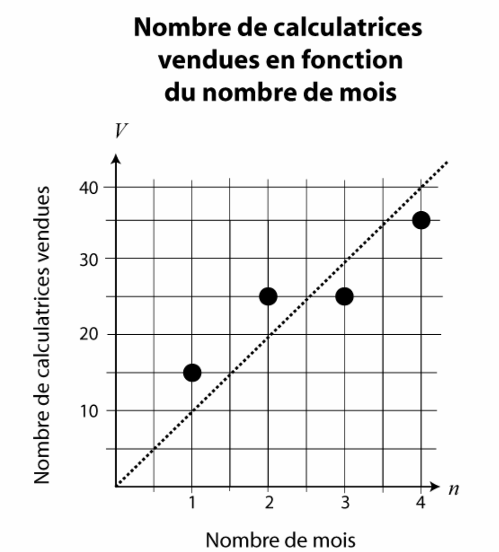
Dans une expérience, par exemple, les élèves mesurent l'étirement subi par un ressort lorsque des objets de masses différentes sont attachés à une de ses extrémités. Ils notent l'étirement subi par le ressort à chaque fois qu'ils ou elles ajoutent un objet. À la suite de cette expérience, les élèves voient clairement que lorsqu'un objet de masse importante est attaché au ressort, l'étirement de celui-ci est plus grand. La relation de l'étirement du ressort en fonction de la masse de l'objet est visuelle et claire. La représentation des données dans un graphique forme un nuage de points. Il incombe à l'enseignant ou à l'enseignante de modeler la tendance du nuage de points pour en tracer la droite la mieux ajustée. Si la tendance du nuage de points peut être associée à une droite (sauf une droite verticale), alors la relation peut être modélisée par une fonction affine.

Fonction affine
Relation du premier degré définie par y=ax +b*, et dont la représentation graphique est une droite, sauf la droite verticale.*

(Curriculum de l'Ontario de 9e et 10e année - Mathématiques, 2005, p. 58)

(Ministère de l'éducation de l'Ontario, 2005b, p. 58)

Une autre expérience peut consister à représenter le nombre de calculatrices vendues dans un magasin au cours d'une période de temps déterminée. L'enseignant ou l'enseignante amène ses élèves à réaliser que la droite la mieux ajustée tracée à partir du nuage de points représente une tendance.



Nuage de points
Ensemble de points portés sur un graphique rectangulaire et qui représentent des données expérimentales.

(Le curriculum de l'Ontario de 9e et 10e année - Mathématiques, 2005)

(Ministère de l'éducation de l'Ontario, 2005b, p. 59)

Utilisation des symboles algébriques

Avant même de commencer l'étude de l'algèbre, les élèves doivent apprendre à utiliser les symboles comme éléments d'un langage par lequel on exprime des idées. Ainsi, l'algèbre ne sera plus une série de règles et de procédures vides de sens.

(Lodholz, 1990, p. 29, traduction libre)

Symbolisme
En mathématiques, le système de signes écrits (symboles mathématiques) dont l'agencement répond à des règles, et qui traduit visuellement la formalisation d'un raisonnement.

(Le Petit Larousse, 2008, p. 981)

Le sens du symbole (symbolisme mathématique) permet d'interpréter diverses relations mathématiques et de représenter un raisonnement algébrique.

L'algèbre est utilisée pour comprendre et établir des relations mathématiques et pour communiquer des idées. À cette fin, les symboles ont une place importante en algèbre. Lorsque les élèves sont en mesure de représenter une situation, une relation ou une idée mathématique à l'aide de symboles, ils font preuve d'un niveau d'abstraction qui démontre un raisonnement algébrique.

Le sens du symbole est à l'algèbre ce que le sens du nombre est à l'arithmétique. Introduit récemment dans le discours sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Bergsten, 1999, p. 123), le sens du symbole est essentiel à la réussite en algèbre.

Selon Baruk (1995, p. 1162), un symbole est un signe qui, en vertu d'une association arbitraire « au départ », évoque ou représente autre chose que lui-même (p. ex., la colombe est un symbole de la paix). Dans l'histoire des mathématiques, les représentations symboliques d'idées et de concepts se sont imposées par convention ou par usage, souvent après de longs débats d'érudits (p. ex., $\frac{1}{4}$, π, 32, 15 %).

Symbole
Signe graphique imposé par l'usage et qui figure une grandeur, un nombre, une opération, une relation, un être mathématiques ou logique de nature quelconque.

(De Champlain, Mathieu, Patenaude et Tessier, 1996)

En arithmétique et en algèbre, on rencontre particulièrement les symboles suivants :

- les signes d'opération (p. ex., +, −, ×, ÷);
- les signes de comparaison (p. ex., =, ≠, <, >);
- les signes qui définissent une quantité (p. ex., les chiffres 0, 1, 2, 3… 9, qui permettent de représenter des nombres, les lettres telles que *n* et *x* et les formes telles que et, qui représentent des inconnues ou des variables).

Au **cycle moyen**, les élèves utilisent les symboles et s'en approprient le sens. Progressivement, ils remplacent les symboles personnels (p. ex., 3 + ♥ + □ = 16) par des lettres pour représenter des inconnues ou des variables (p. ex., $15 + a = 27$). Ils utilisent aussi les symboles pour communiquer un raisonnement algébrique. Au **cycle intermédiaire**, les élèves poursuivent l'utilisation des symboles en vue de les maîtriser. Il est important que les élèves comprennent bien le sens des symboles mathématiques utilisés dans le raisonnement algébrique.

Avoir le sens du symbole, c'est être en mesure :

- de comprendre quand et comment utiliser des symboles pour communiquer;
- de décrire des relations de façon symbolique;
- de reconnaître que les symboles peuvent faciliter la résolution de problèmes;
- de lire et d'interpréter des phrases mathématiques de façon juste et signifiante;
- de traiter le signe = comme l'expression d'une égalité entre deux quantités;
- d'interpréter la valeur des variables et des inconnues;
- de représenter les propriétés des nombres et des opérations de façon algébrique (p. ex., l'égalité $a + b = b + a$ représente la commutativité de l'addition);
- de travailler dans un contexte abstrait.

Symbole de l'égalité et relation d'égalité

Selon Van de Walle (2007, p. 260), le signe = est l'un des symboles les plus importants à maîtriser, à l'élémentaire, dans l'étude de la numération, de l'algèbre et des mathématiques en général. Or, les élèves ont souvent une conception erronée du sens du symbole de l'égalité. Plusieurs considèrent le signe = comme une incitation à effectuer une opération arithmétique plutôt que comme un indicateur d'une relation d'égalité. Cette conception étroite du symbole de l'égalité persiste chez plusieurs élèves et crée un obstacle à leur apprentissage.

La fausse conception du signe = comme incitation à effectuer une opération relève d'un enseignement qui met l'accent sur les réponses et sur des phrases mathématiques de la forme $a + b = ?$. L'utilisation de calculatrice peut aussi renforcer l'idée que le signe = veut dire « trouve la réponse », car la calculatrice affiche la réponse quand on appuie sur la touche =. Il est essentiel que les élèves donnent au signe = le sens d'une relation d'égalité entre deux quantités. Il est donc important, dans l'enseignement, d'utiliser le signe = en misant sur des relations d'égalité et non sur le calcul à effectuer. Il faut en plus utiliser le signe correctement. La compréhension du sens du signe = est essentielle au **cycle intermédiaire** puisque l'on introduit et développe le sens d'une relation d'égalité à partir de l'équation.

Saisir le sens d'une relation d'égalité et le sens du symbole qui la représente (le signe =) est indispensable en mathématiques et en algèbre. La relation d'égalité est une affirmation que deux expressions mathématiques représentent la même quantité, l'une des expressions peut remplacer l'autre sans changer la valeur de l'expression initiale. L'égalité exprime que les expressions en présence sont, non seulement identiques, mais aussi équivalentes. Si on note, par exemple, que $A = B$, cela signifie que l'expression A peut, en tout temps, être remplacée par l'expression B.

Les élèves doivent être exposés à une variété de relations d'égalité afin d'en développer une compréhension approfondie. Pour bien saisir les concepts liés aux relations d'égalité, il importe d'utiliser correctement la terminologie (p. ex., égalité, inégalité, non-égalité, expression [numérique et algébrique], terme, phrase mathématique, équation, formule) qui s'y rattache et d'en souligner les différences.

Pour faciliter l'apprentissage du concept d'égalité, l'enseignant ou l'enseignante pourrait proposer aux élèves des activités qui les incitent à analyser des situations d'égalité et à les traiter de manière algébrique. Il ou elle discute ensuite avec les élèves des stratégies utilisées pour analyser les égalités en privilégiant celles qui font appel aux représentations concrètes, semi-concrètes et symboliques, et qui mettent l'accent sur le sens de l'égalité plutôt que sur l'application mécanique d'une procédure ou de calculs fastidieux.

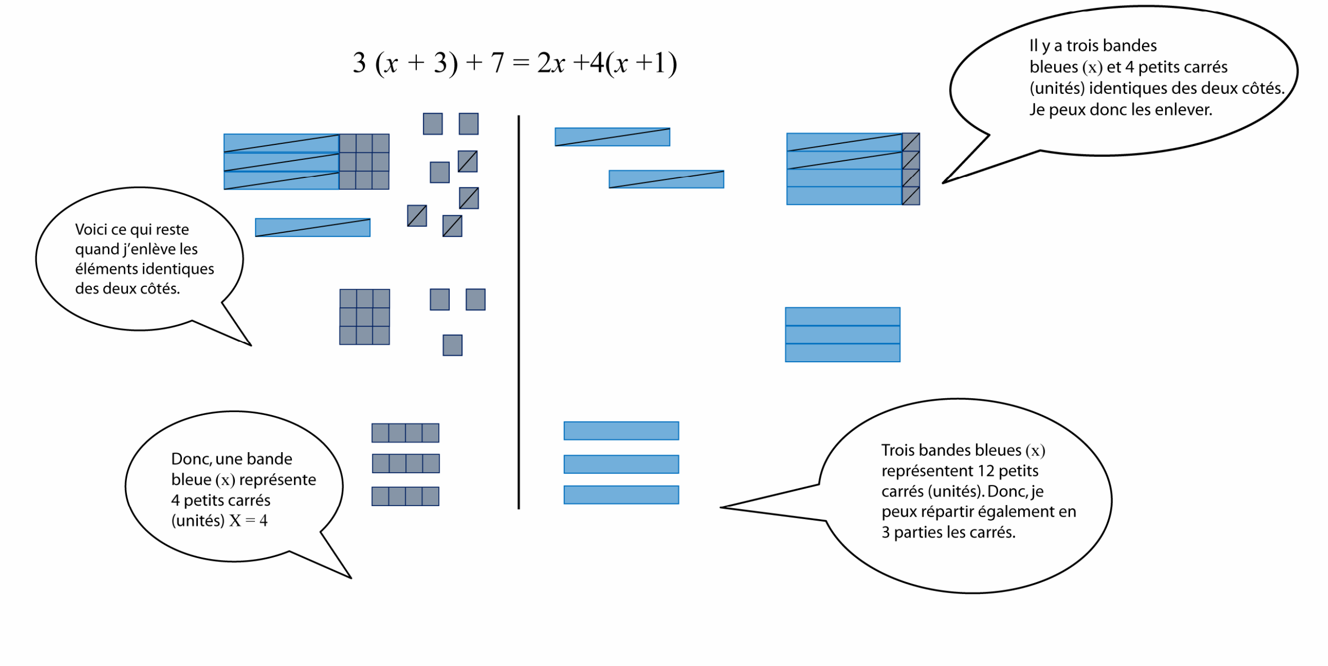
La notion d'équation comme expression d'équilibre est un concept essentiel que les élèves doivent saisir avant de commencer à résoudre des équations (Small, 2010, p. 64). *Résoudre* l'équation consiste à déterminer toutes les façons de donner à certaines des quantités qui y apparaissent, les *inconnues*, des valeurs qui rendent l'énoncé vrai. Ces valeurs possibles sont appelées *solutions* de l'équation.

En algèbre, l'équation est perçue comme un outil important et complexe, raison pour laquelle elle est souvent mal comprise. Selon Wagner (1981, p. 107-118), lorsqu'on présente les équations $7w + 22 = 109$ et $7n + 22 = 109$ à des élèves de 10 à 18 ans et qu'on leur demande laquelle des inconnues, *w ou n* a la plus grande valeur, moins de la moitié des élèves répondent correctement que les deux inconnues ont la même valeur. Les équations sont des égalités qui comportent une ou des valeurs indéterminées, soit une inconnue (p. ex., $a + 135 = 178$) ou des variables (p. ex., $m = 3 \times b + 4$).

Afin de développer les habiletés en algèbre chez les élèves du **cycle intermédiaire**, l'enseignant ou l'enseignante doit intégrer des activités de résolution d'équations où l'élève utilise une variété de matériel concret pour représenter les équations. La balance algébrique à double plateaux, les tuiles algébriques, les jeux de cartes, les enveloppes, les cubes emboîtables, etc. sont des exemples de matériel de manipulation. Ceux-ci peuvent appuyer l'élève à mieux comprendre les étapes de la résolution d'équations algébriques et développer son sens de l'égalité puisqu'il manipule concrètement des équations pour trouver la valeur de l'inconnue. Lorsque l'élève manipule avec aise des équations algébriques avec le matériel concret, l'enseignant ou l'enseignante peut intervenir pour encourager la progression au semi-concret et au symbolique.

Il est donc suggéré de modeler la résolution d'équation de manière symbolique en parallèle avec le matériel concret. Le rhythme d'apprentissage de chaque élève étant différent lors de l'acquisition de divers concepts algébriques, il importe à l'enseignant ou l'enseignante de s'assurer que l'élève dispose d'une variété de matériels de manipulation qui soutient cette progression.

L'habileté à représenter une relation d'égalité de façon symbolique à l'aide d'une équation requiert une bonne compréhension de la relation, un bon sens du symbole et l'utilisation du raisonnement algébrique. Voici un exemple des étapes du raisonnement d'un élève lorsqu'il résout une équation algébrique :



Au **cycle intermédiaire**, les premières expériences des élèves avec les équations proviennent de situations en changement. De fait, ils sont amenés à traduire ces situations pour les représenter de façon symbolique par une équation comme dans l'exemple précédent.

Exemple

> Pierre et Misha préparent un sac de billes qu'ils veulent offrir à leur ami. Pierre dépose 40 billes dans le sac. Misha en dépose aussi. Il y a maintenant 76 billes dans le sac. Combien de billes Misha a-t-il déposées dans le sac?

Lorsque les élèves saisissent bien cette situation, ils peuvent la représenter par l'équation $40 + m = 76$, où m représente le nombre de billes déposées par Misha. Il importe de reconnaître qu'il n'est pas toujours facile pour les élèves de représenter une relation d'égalité à l'aide d'une équation.

Il leur est facile de comprendre la situation selon laquelle Pierre a 4 billes de plus que Misha. Cependant, pour les élèves, il est difficile de représenter cette situation à l'aide d'une équation. Ils auront d'abord besoin de travailler avec du matériel concret avant de proposer l'équation $p = 4 + m$, où p représente le nombre de billes de Pierre et m, le nombre de billes de Misha.

Il est alors important d'inviter régulièrement les élèves à verbaliser leur démarche de résolution, à justifier leurs étapes et à démontrer leur compréhension des concepts présents afin d'éviter que la résolution d'équations ne devienne qu'une application aveugle de procédures. L'utilisation de situations en changement permet aux élèves de développer un sens de l'équation et de saisir d'où les équations proviennent afin d'explorer des équations sans contexte. On peut aussi renforcer les liens entre l'équation et la table de valeurs.

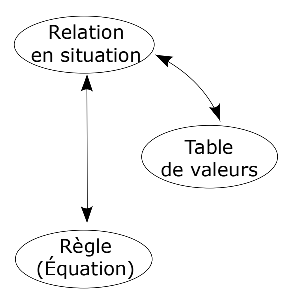
Utilisation de représentations pour modéliser une relation

En tentant de résoudre des problèmes du monde réel, les mathématiciens et les mathématiciennes ont créé, utilisé et généralisé certaines idées, stratégies et représentations pouvant modéliser des relations. Les domaines *Modélisation et algèbre* (en 7e et 8e année) et *Relations* (en 9e année) sont très importants dans le développement du raisonnement algébrique chez l'élève. Ils permettent une réflexion sur deux fondements mathématiques importants : les notions de relations entre des quantités et la possibilité de résoudre un problème pouvant être modélisé par des équations.

Les modes de représentation explorés au **cycle moyen** diffèrent de ceux explorés au **cycle intermédiaire**. Par exemple, en *Modélisation et algèbre* au **cycle moyen**, on utilise davantage les mots, la table de valeurs et la règle alors qu'au **cycle intermédiaire** on utilise certes les mots, la table de valeurs et la règle mais aussi l'équation et le graphique pour interpréter des relations. Il est important que les élèves reconnaissent les similarités et les liens entre les différentes représentations pour développer leur habileté à résoudre des problèmes visuellement ou algébriquement. La façon de s'approprier les données et de les organiser à l'aide de représentations reflète souvent le niveau de développement du raisonnement algébrique chez l'élève. Devant une situation en changement à résoudre, plusieurs représentations sont possibles; certains élèves utilisent du matériel de manipulation ou des illustrations, alors que d'autres représentent les données en mots ou de façon plus symbolique. L'enseignant ou l'enseignante amène les élèves à utiliser de plus en plus la représentation graphique ainsi que les représentations symboliques telles que la table de valeurs et l'équation.

Dès le **cycle moyen**, les élèves sont initiés à trouver et à décrire la régularité d'une suite de figures. Le passage de la description d'une règle à partir d'une suite de figures à la description de la régularité dans une situation en changement est une étape importante du développement du raisonnement algébrique qui peut représenter un défi pour plusieurs élèves. Pour faciliter leur compréhension, il revient à l'enseignant ou l'enseignante de présenter des situations en contexte. Les changements observés peuvent être décrits de façon **qualitative** (p. ex., je suis *plus grand* que l'an dernier, mes cheveux sont *plus longs*, il fait *plus froid* que ce matin) ou de façon **quantitative** (p. ex., j'ai grandi de *2 cm* cette année, la température a chuté de *6 °C* en *3 heures*). Les concepts de changement et celui de régularités sont indissociables dans l'exploration des relations entre deux quantités en changement puisqu'une quantité influe sur l'autre.

Selon Greens et Findell (1999, p. 127-137), l'habileté à représenter des situations de changement au moyen de représentations visuelles (p. ex., graphique, dessin, schéma, esquisse, diagramme) et symboliques (p. ex., table de valeurs, équation) permet à l'élève :
- d'interpréter des situations;
- d'associer et de représenter différentes représentations à une situation particulière;
- de reconnaître l'effet sur les autres représentations lorsqu'on apporte un changement sur les données d'une représentation.



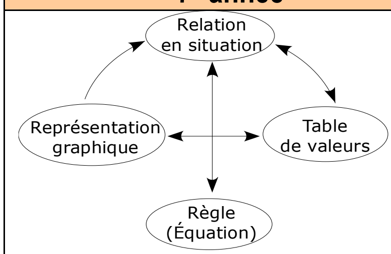
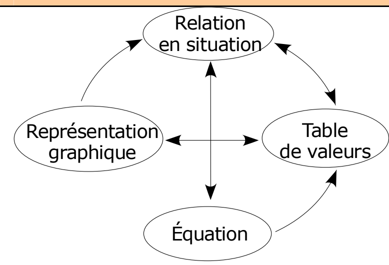
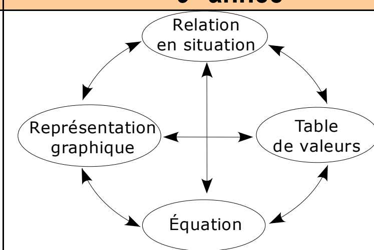
Au **cycle moyen**, les élèves représentent des situations en changement à partir :
- de relations en situation, soit à partir de matériel concret (p. ex., tuiles, jetons, cubes, cure-dents), ou à partir de matériel semi-concret (dessins);
- de règles;
- de tables de valeurs.

Ils ou elles établissent des liens entre ces trois représentations en utilisant la régularité présente dans une situation. Ces représentations permettent alors aux élèves de résoudre des problèmes avec une variété de stratégies.

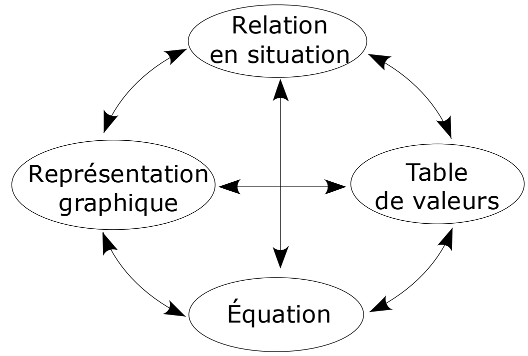
> **Graphique :**
>
> *Points, ligne ou ensemble de lignes qui représentent les variations d'une grandeur mesurable.*
>
> (De Champlain, Mathieu, Patenaud et Tessier, 1996)

Bien que les élèves utilisent des symboles et différents diagrammes depuis la 5e année, c'est lors du **cycle intermédiaire**, qu'ils ou elles sont exposés pour la première fois, à l'utilisation d'une équation et d'une représentation graphique (diagramme avec des points) pour modéliser une relation. On utilise la représentation graphique comme outil de communication et de compréhension. Elle amène de la clarté et de la précision à une situation ou à un problème tout en faisant appel à la créativité. Son utilisation peut aussi générer un questionnement et permettre ainsi à l'élève d'explorer certains aspects d'une situation qui ne seraient pas autrement apparents. De plus, sa construction et son analyse peuvent approfondir la compréhension que l'élève a d'une situation ou d'une relation. C'est en établissant des liens entre la représentation graphique et la situation en changement que l'élève sera en mesure de construire son interprétation de la situation.

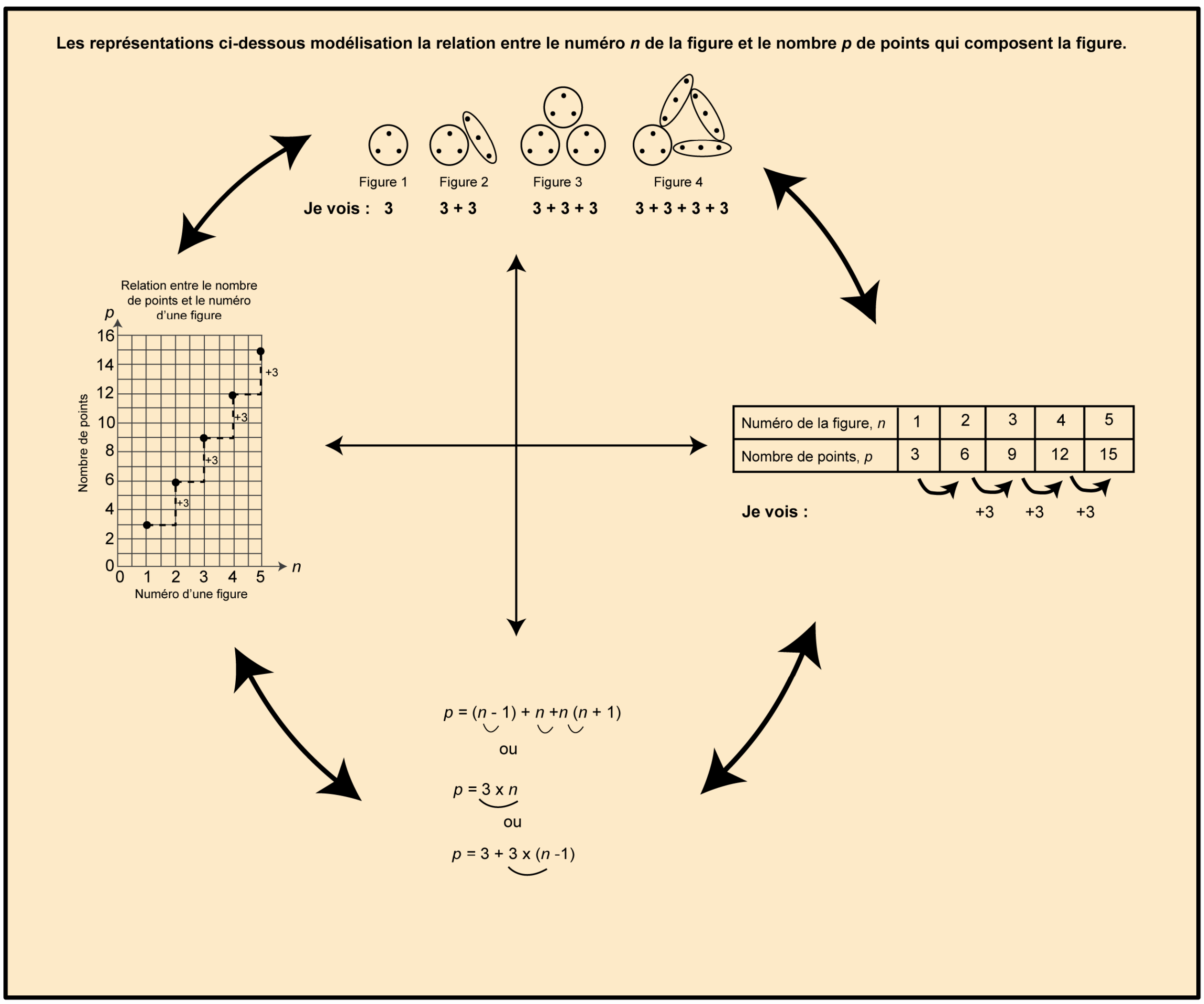
Les diagrammes ci-dessous illustrent la progression dans l'établissement des liens entre les quatre formes de représentations de la 7e à la 9e année conformément aux programmes-cadres des mathématiques.

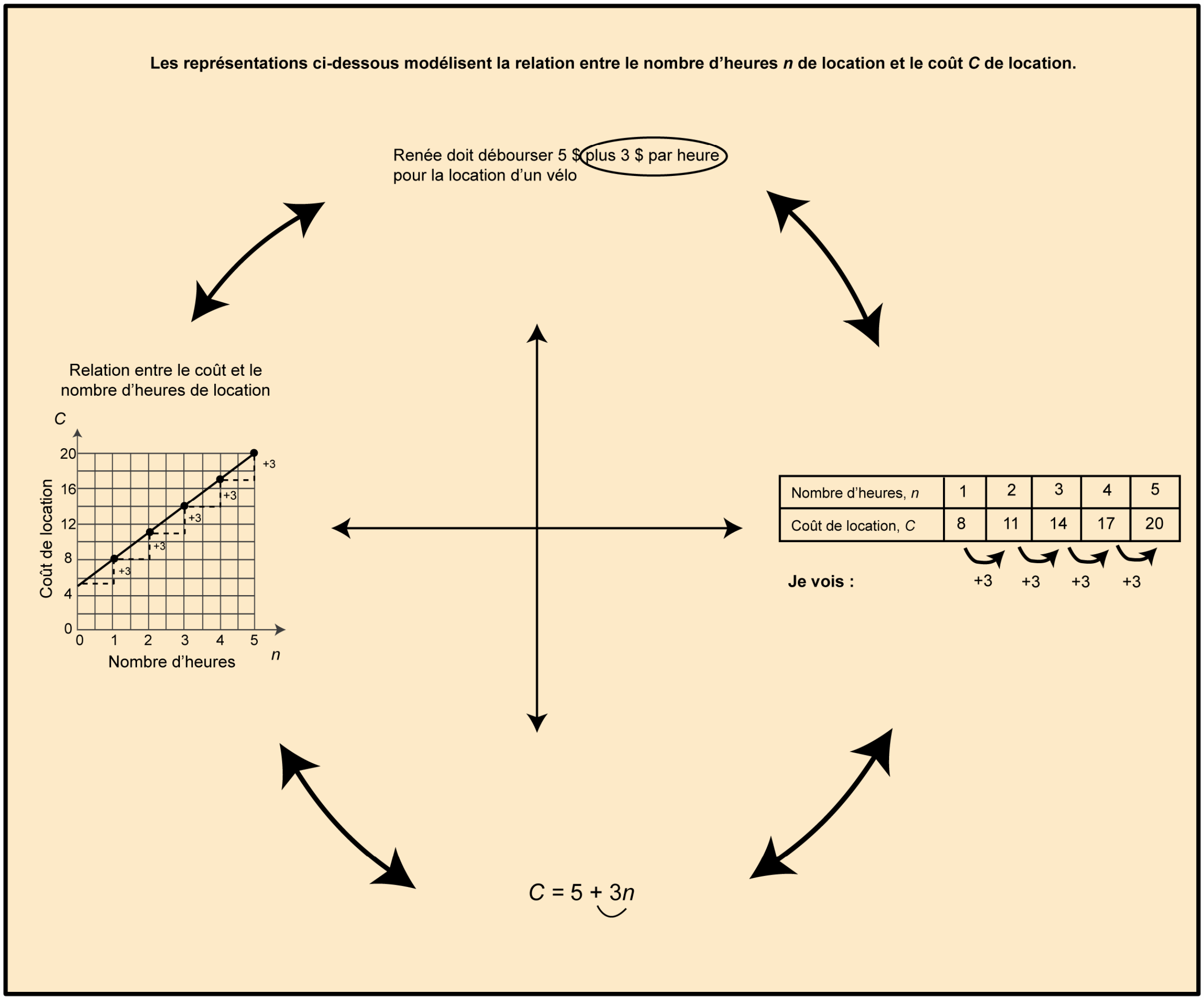
7e année	8e année	9e année
 La représentation graphique **est nouvelle** en 7e année et prend une importance égale aux autres représentations. Les élèves sont amenés : - à interpréter des graphiques pour résoudre un problème; - à tracer la représentation graphique à partir d'une table de valeurs. Ils peuvent donc tracer la représentation graphique pour modéliser une situation à l'aide d'une table de valeurs.	 Le lien entre l'équation et la table de valeurs **est nouveau**. C'est en ayant recours aux notions de numération et d'algèbre, qu'il est possible pour l'élève de construire une table de valeurs. La construction d'une table de valeurs permet ensuite à l'élève de tracer la représentation graphique. Les élèves peuvent comparer deux relations n'ayant pas la même représentation (p. ex., une table de valeurs et un graphique ou une table de valeurs et une équation) pour résoudre des problèmes.	 Les liens entre toutes les représentations sont établis. C'est en ayant recours aux concepts reliés aux fonctions affines, qu'il est possible pour l'élève : - de tracer un graphique à partir d'une équation; - de tracer un graphique à partir d'une relation en situation; - de déterminer une équation à partir d'une table de valeurs ou d'un graphique. Les élèves comparent deux fonctions dans un même plan cartésien pour résoudre des problèmes. Pour la première fois, ils ou elles tracent des nuages de points et si les données peuvent être modélisées par une fonction affine, ils ou elles tracent les droites les mieux ajustées pour en déterminer les équations.

C’est en utilisant les différentes formes de représentations (visuelles et symboliques) et en établissant des liens entre celles-ci que l’élève peut démontrer une compréhension approfondie des concepts en lien avec l’étude de relations. C’est ainsi qu’il ou elle peut communiquer, justifier et généraliser des situations au moyen de règles qui ont un sens pour lui ou elle.



Les exemples suivants démontrent qu’on peut modéliser une suite de figures à l’aide des quatre formes de représentations par lesquelles la même régularité est observée.





« L'utilisation du matériel de manipulation et d'outils technologiques joue un rôle fondamental dans la compréhension des concepts mathématiques de base et mène à une meilleure compréhension des concepts mathématiques abstraits. » (Ministère de l'Éducation, 2009a, Monographie n°6, p. 1)

L'utilisation de la calculatrice à affichage graphique s'avère très utile et motivante pour les élèves, spécialement lorsqu'ils modélisent et analysent plusieurs situations en changement. « Les ordinateurs et les calculatrices sont considérées comme des outils importants de résolution de problèmes qui permettent à l'élève, en autre, d'explorer, de rechercher des régularités pouvant mener à des réponses, d'effectuer plus rapidement des calculs que requièrent des opérations complexes et de consacrer plus de temps pour l'analyse et la réflexion. De plus, les ordinateurs et les calculatrices donnent aux élèves la possibilité de rechercher leurs propres solutions, parfois même des solutions auxquelles l'enseignant ou l'enseignante n'aurait pas pensé. » (Ministère de l'Éducation, 2005a, p. 20)

Raisonnement proportionnel

Les élèves ont été exposés au raisonnement proportionnel dans plusieurs domaines : en art; en géographie (dans le cadre de l'interprétation des cartes, de l'utilisation d'une échelle); et en mathématiques (dans le cadre de l'étude des nombres naturels). Il y a une relation de proportionnalité entre deux quantités lorsque ces quantités peuvent augmenter ou diminuer simultanément selon le même facteur. Par exemple, si une des deux quantités est triplée, l'autre est triplée aussi. Le rapport entre les deux quantités est alors constant (p. ex., $\frac{1}{6} = \frac{3}{18}$). Une telle égalité entre deux rapports s'appelle une proportion.

L'habileté à utiliser un raisonnement proportionnel se développe tout au long de l'apprentissage des mathématiques. Le raisonnement proportionnel intervient lors de la comparaison de deux rapports entre eux et de la reconnaissance d'une relation multiplicative. Par exemple, un enseignant ou une enseignante demande aux élèves du **cycle primaire** de déterminer le nombre de morceaux que contiennent 3 tablettes de chocolat si une tablette contient 8 morceaux. À noter que les relations multiplicatives incluent l'opération de division, puisque toute division peut être transformée en multiplication (p. ex., diviser par 2 est l'équivalent de multiplier par ½).

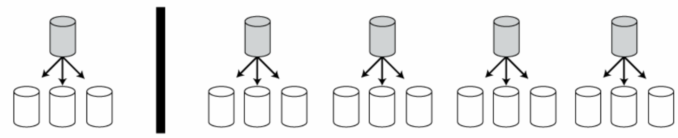
Les termes *rapport* et *proportion*, ainsi que les notations qui s'y rattachent (p. ex., 2 : 3), ne font pas partie du programme-cadre de mathématiques au **cycle moyen,** pas plus que l'étude de stratégies pour résoudre algébriquement un problème impliquant une relation de proportionnalité. Au **cycle moyen**, l'étude des relations de proportionnalité porte plutôt sur la reconnaissance et sur la description de la relation multiplicative dans diverses situations de résolution de problèmes. Les élèves utilisent intuitivement le raisonnement proportionnel pour résoudre des problèmes impliquant deux quantités qui sont dans un rapport de un à plusieurs (p. ex., 1 tablette pour 8 morceaux), de plusieurs à une (p.ex., 3 personnes par table) ou de plusieurs à plusieurs (p. ex., 2 litres de jus pour 5 personnes). Ils utilisent aussi du matériel concret et divers modèles tels que des illustrations, des tables de valeurs ou des droites numériques.

Au **cycle intermédiaire**, les élèves représentent et décrivent une relation proportionnelle à l'aide d'un rapport et d'un taux. L'utilisation des rapports et des taux dans des situations réelles permet non seulement de prédire l'effet de la variation des termes, mais aussi de distinguer les relations proportionnelles aux relations non proportionnelles. Il est difficile pour les élèves de faire la distinction entre les relations proportionnelles et les relations non proportionnelles, car ils assument que puisque toutes les proportions représentent une relation linéaire, alors toutes les relations linéaires sont proportionnelles. Cette supposition est fausse. Lorsque deux quantités sont en relation proportionnelle directe, cela veut dire qu'ils ont une relation multiplicative. L'une des quantités est toujours le multiple de l'autre quantité. Bref, cette relation proportionnelle est encore définie par la relation $y = kx$ où x et y sont des variables et k une constante (Greenes et Findell, 1999, p. 127-137).

Pour développer le raisonnement proportionnel chez les élèves, il incombe à l'enseignant ou l'enseignante de présenter différents types de problèmes qui permettent de reconnaître la relation de proportionnalité. La situation suivante présente une relation de proportionnalité.

> *Pour la journée d'athlétisme, les élèves de la classe de Mme Guérin préparent du jus pour les coureurs. Pour chaque contenant de jus concentré, il faut ajouter 3 contenants d'eau. Combien leur faudra-t-il ajouter de contenants d'eau à 4 contenants de jus concentré? (Ministère de l'Éducation, 2008c, p. 51)*

Solution à l'aide d'illustrations



Il faudra donc 12 contenants d'eau (4 x 3 contenants d'eau)

Solution à l'aide d'une table de valeurs

Nombre de contenants de jus	1	2	3	4	5
Nombre de contenants d'eau	3	6	9	12	15

Dans cette situation, on observe qu'il y a une relation de proportionnalité entre le nombre de contenants de jus et le nombre de contenants d'eau. Le nombre de contenants d'eau est égal à 3 fois le nombre de contenants de jus. Cette relation peut être représentée par l'équation $e = 3 \times j$, où e est le nombre de contenants d'eau et j, nombre de contenants de jus. Pour développer le raisonnement algébrique tout comme le raisonnement proportionnel, l'enseignant ou l'enseignante emmène les élèves à prolonger la situation pour 15 contenants de jus concentrés. On pourrait aussi poser la question aux élèves à savoir lequel des jus composés (p. ex. entre le premier mélange et le second) sera le plus sucré. Ceci permet de relever la relation d'égalité ou d'équivalence entre les deux mélanges.

La situation suivante par contre est une relation linéaire, mais ne présente pas une relation de proportionnalité.

> *Lorsqu'on commande des CD de musique par Internet, on doit payer 10 $ de frais de manutention plus 15 $ par CD acheté. La relation entre le nombre de CD achetés et le coût peut être représentée par la table de valeurs suivante.*

Nombre de CD achetés	1	2	3	4
Coût ($)	25	40	55	70

Dans cette situation, on constate qu'il n'y a pas de relation de proportionnalité entre le nombre de CD achetés et le coût, car si le nombre de CD est triplé, le coût ne l'est pas. De plus, la relation entre le nombre de CD achetés et le coût ne peut pas être représentée par l'égalité entre deux des rapports (p. ex., $\frac{1}{25} \neq \frac{3}{55}$).

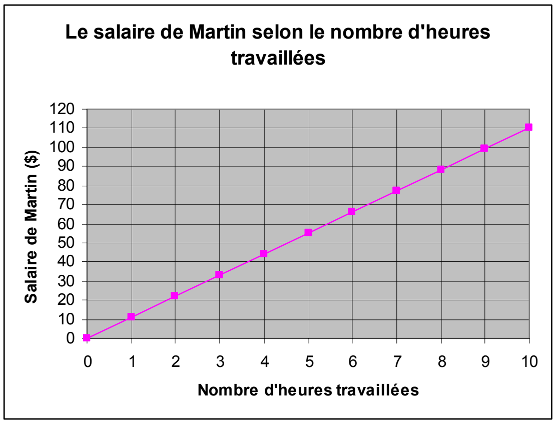
Dans une table de valeurs qui représente une situation de proportionnalité, les rapports entre les quantités correspondantes sont équivalents. De plus, cette table de valeurs permet d'établir des proportions (p. ex., $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$). La table de valeurs peut aussi être construite sans que les valeurs soient inscrites dans un ordre croissant ou sans que toutes les valeurs soient inscrites. Il est en effet parfois plus facile de trouver la solution au problème en utilisant un raisonnement proportionnel (la relation de proportionnalité).

En 9e année, cette relation de proportionnalité sera introduite sous le terme de variation directe. À ce niveau il est aussi important de mentionner qu'une variation partielle ou indirecte n'est pas une relation de proportionnalité. Les exemples suivants peuvent permettre de bien distinguer les notions de variations directe et indirecte.

Exemple 1 – Variation directe

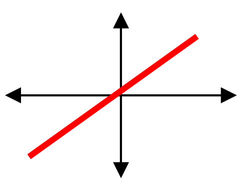
Texte	**Équation**
Exemple : Martin travaille comme caissier au magasin de son quartier. Il gagne 11$ de l'heure. On s'intéresse au salaire qu'il aura gagné selon le nombre d'heures qu'il aura travaillé.	L'équation générale pour une fonction linéaire directe est de la forme : $y=ax$ où y est la variable dépendante; a est le taux de variation; x est la variable indépendante En effet, la valeur initiale d'une fonction linéaire directe est toujours nulle. Alors, si on reprend l'équation de base d'une variation linéaire, on a : $y = ax + b$ $y = ax + 0$ $y = ax$

Graphique



Le graphique d'une fonction linéaire directe est toujours une droite qui passe par l'origine (0,0).

Si le taux de variation est positif, la droite sera inclinée vers le haut. On dira qu'elle est croissante.



Si le taux de variation est négatif, la droite sera inclinée vers le bas. On dira qu'elle est décroissante

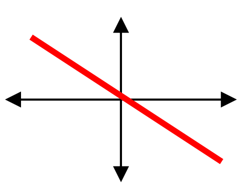


Table de valeurs

	Nombre d'heures travaillées; *x*	Salaire de Martin ($); *y*	
	0	0	
	1	11	
	2	22	
	3	33	
+ 7	4	44	+ 77
	5	55	
	6	66	
	7	77	
	8	88	
+ 2	9	99	+ 22
	10	110	

Dans une table de valeurs d'une fonction linéaire directe, les taux de variation sont tous constants.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{77-0}{7-0} = \frac{77}{7} = 11$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{110-88}{10-8} = \frac{22}{2} = 11$$

Dans une table de valeurs d'une fonction linéaire directe, la valeur initiale (ordonnée à l'origine) est toujours nulle.

Dans notre exemple, lorsque *x* vaut 0, *y* vaut 0. Alors la valeur initiale est 0. C'est aussi la valeur de la coordonnée *y* du point de la droite qui coupe l'axe des *y*. (0, 0)

Dans une table de valeurs d'une fonction linéaire directe, on peut trouver un coefficient de proportionnalité :

$$\frac{y}{x} = \frac{11}{1} = \frac{22}{2} = \frac{33}{3} = \frac{44}{4} = 11$$

Exemple 2 – Variation indirecte

<table>
<tr><th>Texte</th><th>Équation</th></tr>
<tr><td>Exemple :

Anick à acheter un paquet de 100 feuilles mobiles au début de l’année scolaire. Elle utilise en moyenne 5 feuilles par jour d’école. Démontre le nombre de feuilles qui lui reste après chaque jour d’école.</td><td>L’équation générale pour une fonction linéaire directe est de la forme :

y= ax + b

où y est la variable dépendante;

a est le taux de variation;

x est la variable indépendante;

b est la valeur initiale.

En effet, la valeur initiale et le taux de variation d’une fonction linéaire partielle ne sont jamais nuls.

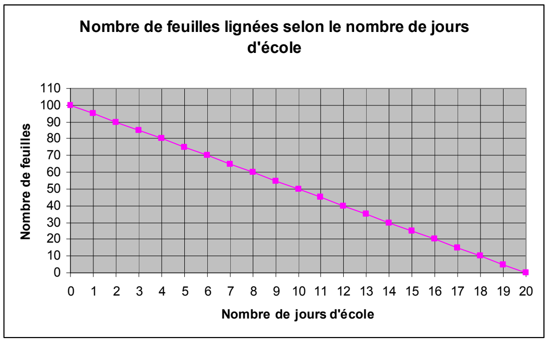
Pour notre exemple :

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{35-95}{13-1}=\frac{-60}{12}=-5$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{15-30}{17-14}=\frac{-15}{3}=-5$</td></tr>
</table>

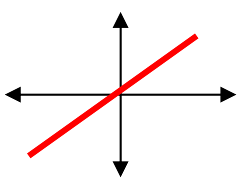
Graphique	**Table de valeurs**

Graphique



Le graphique d'une fonction linéaire partielle est toujours une droite qui NE passe PAS par l'origine (0,0).

Si le taux de variation est positif, la droite sera inclinée vers le haut. On dira qu'elle est croissante.



Si le taux de variation est négatif, la droite sera inclinée vers le bas. On dira qu'elle est décroissante.

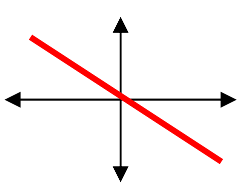


Table de valeurs

	Nombre de jour d'école; x	Nombre de feuilles lignées; y	
	0	100	
	1	95	
	2	90	
	3	85	
	4	80	
	5	75	
	6	70	
+ 12	7	65	**- 60**
	8	60	
	9	55	
	10	50	
	11	45	
	12	40	
	13	35	
	14	30	
+ 3	15	25	**- 15**
	16	20	
	17	15	
	18	10	
	19	5	
	20	0	

	Dans une table de valeurs d'une fonction linéaire partielle, les taux de variation sont tous constants $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{35 - 95}{13 - 1} = \frac{-60}{12} = -5$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{15 - 30}{17 - 14} = \frac{-15}{3} = -5$ Dans une table de valeurs d'une fonction linéaire partielle, la valeur initiale (ordonnée à l'origine) est non nulle. Dans notre exemple, lorsque x vaut 0, *y* vaut 100. Alors la valeur initiale est 100. C'est aussi la valeur de la coordonnée *y* du point de la droite qui coupe l'axe des y. (0, 100) Dans une table de valeurs d'une fonction linéaire directe, on NE peut PAS trouver un coefficient de proportionnalité : $\frac{y}{x} \neq \frac{90}{2} \neq \frac{85}{3} \neq \frac{80}{4} \neq \frac{75}{5} \neq ..... \neq \frac{0}{20}$

RÔLE DE L’ENSEIGNANT OU DE L’ENSEIGNANTE

Le rôle de l’enseignant ou l’enseignante s’articule autour de trois axes : créer un milieu d’apprentissage convivial, proposer des activités pertinentes et faire de l’aménagement linguistique en français une priorité.

Créer un milieu d’apprentissage convivial

L’attitude des élèves face aux mathématiques influe sur leur façon d’aborder la résolution de problèmes et détermine leur degré de réussite en mathématiques. L’enseignant ou l’enseignante peut développer chez l’élève un plus grand niveau de confiance en mathématiques en élaborant une gamme de stratégies d’enseignement et d’évaluation fondées sur une pédagogie éprouvée. Il lui faut concevoir des stratégies qui tiennent compte des différents styles d’apprentissage et les adapter pour répondre aux divers besoins de ses élèves. Les stratégies utilisées devraient aussi viser à insuffler à chaque élève le désir d’apprendre et l’inciter à donner son plein rendement. Enfin, l’enseignante ou l’enseignant exerce une influence déterminante en favorisant chez les élèves l’adoption d’une attitude positive à l’égard des mathématiques, ce qui contribue à les démystifier et à réduire la phobie qu’elles inspirent chez certains élèves. À cet égard, le Groupe d’experts pour la réussite des élèves fait état dans son rapport intitulé *La numératie en tête* (Ministère de l’Éducation de l’Ontario, 2004, p. 39) de cinq mythes qui, d’après Arthur Costa, renforcent l’idée que les mathématiques sont la matière la plus difficile du curriculum et dont il faut se défaire. Deux de ces mythes résument bien le changement à effectuer en mathématiques pour favoriser l’établissement d’un climat propice en salle de classe :

- Il n’y a qu’une seule façon de résoudre un problème mathématique; suivre une procédure et appliquer des formules prescrites pour arriver à la bonne réponse.
- L’enseignante ou l’enseignant et le manuel sont infaillibles; on ne les remet jamais en question.

Selon Costa, l’utilisation de stratégies variées de résolution de problèmes stimule la curiosité intellectuelle des élèves en les encourageant à poser des questions, à comparer leur pensée à celle des autres, à explorer différentes façons de résoudre le problème et à persister dans leur démarche. De plus, il faut mettre l’accent sur les processus mathématiques et les liens entre les concepts et les structures mathématiques. De cette façon, l’enseignant ou l’enseignante accroît la portée de ses stratégies d’intervention visant à permettre aux élèves de développer une meilleure compréhension des mathématiques.

Proposer des activités pertinentes

De par leur conception, les cours de 9e année constituent le prolongement du programme de mathématiques de 7e et 8e année pour permettre une transition sans heurt de l'élémentaire au secondaire. La philosophie est la même : donner à l'élève la possibilité de découvrir les mathématiques par le biais d'expériences concrètes avant de l'initier aux concepts plus abstraits. Aussi incombe-t-il à l'enseignant ou l'enseignante de concevoir des activités qui se fondent sur un apprentissage actif et de faire constamment des liens entre la théorie et la pratique. En misant sur le connu et le concret, il ou elle amènera les élèves à découvrir et à intégrer les concepts à l'étude par la vérification d'hypothèses, la manipulation de matériel ou l'utilisation d'outils technologiques, la discussion et la réflexion sur le travail effectué. En situant l'activité dans un contexte connu, les élèves peuvent en voir clairement la pertinence et l'application dans le monde qui les entoure.

Faire de l'aménagement linguistique en français une priorité

La qualité de la langue utilisée est garante de la qualité des apprentissages. Il importe donc qu'en salle de classe on accorde la plus grande importance à la qualité de la communication orale et écrite, quelle que soit l'activité d'apprentissage. Il ne s'agit pas toutefois de tout corriger, mais plutôt d'encadrer l'élève dans le processus de production orale et écrite pour l'amener progressivement à communiquer clairement ses idées. Il faut offrir à l'élève un milieu linguistique cohérent, où tout contribue à enrichir ses compétences en français. Il est donc essentiel que l'élève dispose de diverses ressources d'apprentissage en français.

Dans un contexte d'enseignement par la résolution de problèmes et de développement du raisonnement algébrique, l'enseignant ou l'enseignante a recours à des stratégies de questionnement efficaces afin d'inciter les élèves à réfléchir et à développer leurs propres stratégies de résolution de problèmes ainsi que leur pensée algébrique. Pour plus de détails au sujet du rôle de l'enseignant ou de l'enseignante dans un contexte de résolution de problèmes, voir le Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année, fascicule 2 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006a, p. 27)

RÉFÉRENCES

Baroody, Arthur J., et Ronald T. Coslick. 1998. *Fostering Children's Mathematical Power: An Investigative Approach to K-8 Mathematics Instruction*, Mahwah (NJ), Lawrence Erlbaum Associates, p. 16-3.

Baruk, Stella. 1995. *Dictionnaire de mathématiques élémentaires : pédagogie, langue, méthode, exemples, étymologie, histoire, curiosité*, nouv. éd. enrichie de trois index, coll. « Science ouverte », Paris, Éditions du Seuil, p. 1087, 1162.

Bergsten, Christer. 1999. « From Sense to Symbol Sense », dans Inge Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education I.II*, Osnabrück (Allemagne), Forschungsinstitut fur Mathematikdidaktik, p. 123, [En ligne], [www.fmd. uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings-1-vol2-v1-0.pdf] (Consulté le 9 juin 2008).

De Champlain, D., Mathieu, P., Patenaude, P. et H. Tessier. 1996. *Lexique Mathématique : Enseignement secondaire*. 2e édition. Beauport, QC, Canada : Les Éditions du Triangle d'Or inc, p. G20.

Devlin, K. 2010. The Mathematical Brain. In, Mind, Brain & Education : Neuroscience Implications for the Classroom. Bloomington, IN, United States : Solution Tree Press, p. 163-177.

Driscoll, Mark. 1999. *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers, Grades 6-10*, Portsmouth (NH), Heinemann, p. 1-19.

Greens, C. et C. Findell. 1999. Developing Students' Algebraic Reasoning Abilities. In, Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12. Reston, VA, United States : National Council of Teachers of Mathematics, p. 127-137.

Lodholz, Richard D. 1990 « The Transition from Arithmetic to Algebra », dans Edgar L. Edwards, JR. (Ed.), *Algebra for Everyone*, 8e éd., Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 29.

National Council of Teachers of Mathematics. 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 37-40.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2010. Faire croître le succès : évaluation et communication du rendement des élèves fréquentant les écoles de l'Ontario.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2005a. *Le curriculum de l'Ontario de la 1ère à la 8e année – Mathématiques*, Révisé, Toronto, le Ministère, p. 19, 20, 85, 96, 99 et 101.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2005b. *Le curriculum de l'Ontario 9e et 10e année – Mathématiques*, Révisé, Toronto, le Ministère, p. 9, 58, 59.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2008c. *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la 4*e *à la 6*e *année, Numération et sens du nombre*, fascicule 1, Toronto, le Ministère, p. 49-54.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2009a. *Le passage à l'abstrait dans l'apprentissage des mathématiques au cycle intermédiaire (de la 7e à la 10e année),* Monographie n°6.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2009b. *Une approche culturelle de l'enseignement pour l'appropriation de la culture dans les écoles de langue française de l'Ontario*, p. 19-21.

Québec. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2001. *Programme de formation de l'école québécoise : Éducation préscolaire, Enseignement primaire*, Québec, le Ministère, p. 125, 126 et 132.

Radford, L. et S. Demers. 2004. Communication et apprentissage : Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques. Ottawa, ON, Canada : Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, p. 15-25, 28-34 et p. 81-86.

Radford, L., Demers, S et I. Miranda. 2009. Processus d'abstraction en mathématiques : Repères pratiques et conceptuels. Ottawa, ON, Canada : Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, p. 7-26.

Raynal, Françoise, et Alain Rieunier. 2003. *Pédagogie : dictionnaire des concepts clés; apprentissage, formation, psychologie cognitive*, coll. « Pédagogies/Outils », 4e éd., Paris, ESF éditeur, p. 13, 156 et 315.

Roegiers, Xavier. 2000. *Les mathématiques à l'école élémentaire : Tome 1*, Belgique, De Boeck, p. 77.

Small, Marian. 2010. *Régularités et algebra – Connaissances et stratégies*, coll. « PRIME », Toronto, Duval, p. 64.

Sousa, D. A. 2010. Un cerveau pour apprendre les mathématiques : Mieux comprendre le fonctionnement du cerveau pour enseigner les mathématiques plus efficacement. Traduction de Érika Duchesne. Adaptation de Michel Lyons et Gervais Sirois. Montréal, QC : Chenelière/Éducation, p. 128-133.

Squalli, Hassane. Automne 2002. « Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire : un exemple de raisonnement à l'aide de concepts mathématiques », *Instantanés mathématiques*, vol. XXXIX, Montréal, Service Apame, p. 8 et 9.

Squalli, Hassane, et Laurent Theis. Novembre 2005. *Le développement de la pensée algébrique au primaire et chez des élèves en difficulté grave d'apprentissage*, atelier de formation à l'UQAM, p. 5.

Usiskin, Zalman. Février 1997. «Doing Algebra in Grades K-4», Teaching Children Mathematics, vol. 3, n°6, Reston (VA), National council of Teachers of Mathematics, p. 346.

Vance, James H. Janvier 1998. « Number Operations from an Algebraic Perspective », *Teaching Children Mathematics*, vol. 4, no 5, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 282.

Van de Walle, John A., et Sandra Folk. 2005. *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, éd. canadienne, Toronto, Pearson Education Canada, p. 308-309, 401.

Van de Walle, John A. 2007. *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, Boston (MA), Pearson Education, p. 260.

Van de Walle, J. A. et L. H. Lovin. 2008. L'enseignement des mathématiques : L'élève au centre de son apprentissage. Tome 3. Traduction de Corneille Kazadi et de France Campagna. Saint-Laurent, QC : ERPI, p. 29, 288-330.

Wagner, Sigrid. Mars 1981. « Conservation of Equation and Function Under Transformation of Variable », *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 12, no 2, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 107-118.