Éducation en langue française en Ontario
UN MONDE DE POSSIBILITÉS

Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 7^{e} à la 9^{e} année

Fascicule 3 : Mesure et géométrie

(Version provisoire pour mise à l'essai)

2012

Éducation en Ontario L'excellence pour tous et toutes

Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 7e à la 9e année

Fascicule 1 : Éléments fondamentaux *1. Principes de base* *2. Résolution de problèmes* *3. Communication*
Fascicule 2 : Algèbre
Fascicule 3 : Mesure et géométrie

Ce document a été produit en s'efforçant, dans la mesure du possible, d'identifier les ressources et outils mathématiques (p. ex., le matériel de manipulation) par leur nom générique. Dans le cas où un produit spécifique est utilisé par le personnel enseignant des écoles de l'Ontario, ce produit a été identifié par la marque sous laquelle il est commercialisé. L'inclusion des références aux produits spécifiques dans le présent document ne signifie aucunement que le Ministère de l'Éducation en recommande l'utilisation.

Table des matières

PRÉFACE

Le Ministère de l'Éducation de l'Ontario a publié en 2006 une série de guides pédagogiques composée d'un guide principal et de guides d'accompagnement pour appuyer la mise en œuvre des recommandations présentées dans les rapports de tables rondes d'experts en mathématiques. Ces documents, intitulés Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année ont connu un grand succès à l'élémentaire. Ils comblent un grand besoin de ressources d'appui et proposent des stratégies précises pour l'élaboration d'un programme de mathématiques efficace et la création d'une communauté d'apprenantes et d'apprenants chez qui le raisonnement mathématique est développé et valorisé.

Depuis la publication de cette série, on constate une demande croissante pour une version similaire couvrant l'enseignement des mathématiques au cycle intermédiaire. Ce besoin s'explique par un manque de ressources pédagogiques de ce genre pour le cycle intermédiaire. Toutes les consultations menées en 2011 auprès des parties concernées ont clairement démontré l'urgence et la nécessité de produire, sous forme de fascicules, un guide portant sur des stratégies efficaces pour l'enseignement des mathématiques de la 7e et la 9e année.

Contrairement à la série de l'élémentaire, le Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 7e à la 9e année ne contient pas de sections portant sur les grandes idées et les situations d'apprentissages. Il porte plutôt sur la résolution de problèmes comme principal contexte d'apprentissage des mathématiques et sur la communication comme moyen de développement et d'expression du raisonnement mathématique. Il contient également des stratégies d'évaluation conforme à la politique énoncée dans Faire croître le succès (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010) ainsi que des stratégies de gestion de classe et de communication.

Le Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 7e à la 9e année comprend trois fascicules. Le premier porte sur les principes de base de l'enseignement des mathématiques, la résolution de problèmes et la communication mathématique. Le deuxième se concentre sur les concepts algébriques retrouvés dans le domaine d'étude Modélisation et algèbre de 7e et 8e année, et dans les domaines d'étude Relations et Numération et algèbre de 9e année. Le troisième et dernier traite des concepts de mesure et de géométrie retrouvés dans les deux domaines d'étude de 7e et 8e année, soit Géométrie et sens de l'espace et Mesure, et Mesure et géométrie du programme-cadre de mathématiques de 9e année. Ils sont conçus pour aider l'enseignante ou l'enseignant à s'approprier la pédagogie propre à chaque domaine mathématique afin d'améliorer le rendement des élèves en mathématiques.

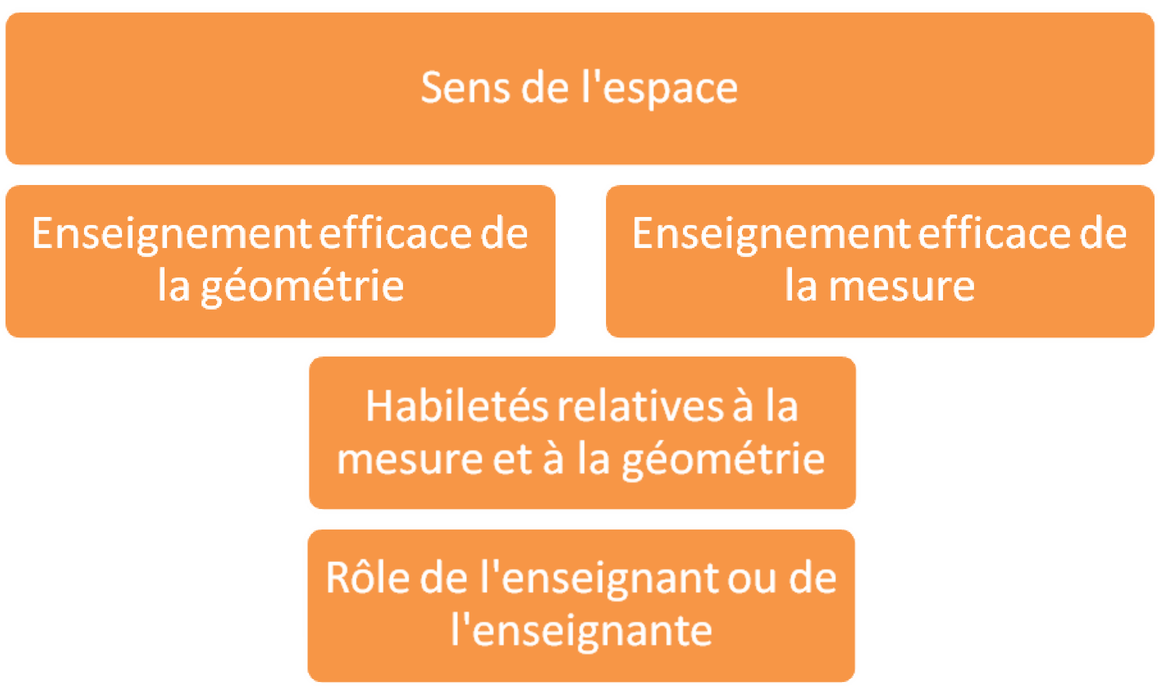
Ces documents d'appui aux programmes-cadres de mathématiques ont été élaborés en conformité avec les principales initiatives ministérielles pour soutenir la réussite scolaire des élèves et appuyer le développement durable de la communauté scolaire de langue française de l'Ontario. Ils mettent l'accent, entre autres, sur des stratégies d'enseignement qui favorisent l'acquisition par chaque élève, de compétences en communication orale.

INTRODUCTION

> *Les domaines des cours de 9e année ont été conçus de façon à consolider les contenus de 8e année tout en ouvrant de nouvelles perspectives à l'élève pour la poursuite de ses études. Ils sont semblables à ceux du curriculum du palier élémentaire. Certaines modifications ont néanmoins été apportées afin de les adapter à la nouvelle orientation que prennent les mathématiques au palier secondaire.*
>
> (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 9)

Une des modifications importantes est la fusion des deux domaines d'étude à l'élémentaire, soit *Géométrie et sens de l'espace* et *Mesure* en un seul domaine d'étude en 9e année, *Mesure et géométrie*. Même s'ils sont des domaines séparés à l'élémentaire, l'enseignant ou l'enseignante devrait encourager la compréhension des liens qui existent entre ces domaines par le choix approprié d'activités. Le curriculum de mathématiques de l'Ontario, 9e et 10e année précise que, « Le domaine *Mesure et géométrie* poursuit l'étude abordée en 8e année des relations qui existent entre diverses figures et entre divers solides. Il vise à développer les grandes idées rattachées aux formules dans le but de mieux comprendre les liens qui existent entre ces dernières et les appliquer dans divers problèmes incluant le calcul de l'aire maximale selon différentes données. » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 9)

Le présent document traite de thèmes suivants :

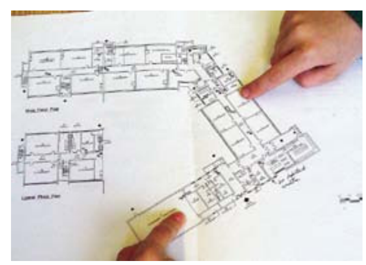


SENS DE L'ESPACE

Le développement du sens de l'espace permet à l'élève de représenter et de décrire, de façon ordonnée, les objets qui l'entourent et leurs relations spatiales. « Le sens de l'espace est nécessaire pour interpréter, comprendre et apprécier le monde essentiellement géométrique qui nous entoure. La connaissance intuitive des caractéristiques des objets géométriques (figures planes et solides), de leurs interrelations et des effets des transformations sur eux est un élément essentiel de ce sens de l'espace. » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a, p. 9)

Van de Walle et Lovin (2008b, p. 191) définit le sens de l'espace comme « l'intuition des figures et des relations entre elles. Les individus possédant le sens de l'espace perçoivent intuitivement les aspects géométriques du monde qui les entoure tout comme les formes et les objets dans leur milieu.» Le rôle de l'enseignant et de l'enseignante est d'éveiller chez l'élève le sens de l'espace en l'exposant à des expériences enrichissantes avec les formes géométriques.

Pour que l'élève comprenne l'espace d'une structure ou d'un objet, il faut qu'elle ou il développe son sens de la mesure dans une vue spatiale en tenant compte des attributs *longueur, aire* et *volume.* Par exemple, lorsque l'élève mesure l'attribut *aire*, elle ou il doit pouvoir visualiser cette surface dans un plan.

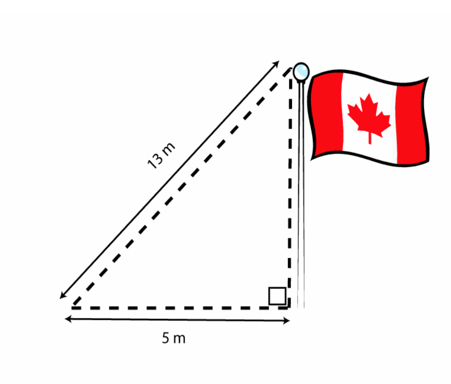
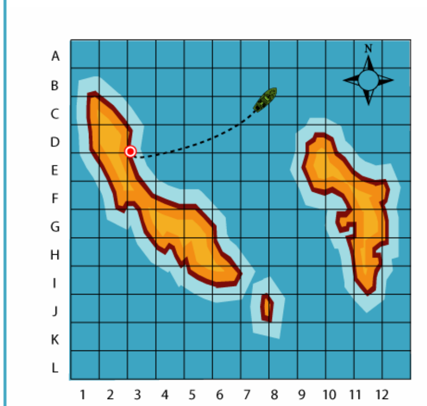


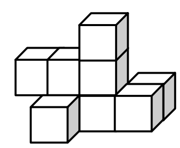
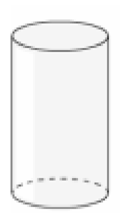
Afin de faire preuve d'un sens de l'espace, l'élève doit posséder des habiletés spatiales, notamment l'**orientation spatiale** et la **visualisation**. Grâce à l'orientation spatiale, il ou elle peut situer sa position par rapport à des objets ou à des points dans l'espace et peut se déplacer dans son milieu. Il ou elle comprend et établit des liens entre ses différentes positions dans l'espace en ayant recours au plan cartésien et aux quatre quadrants qui le composent. Quant à la visualisation, elle lui permet de créer des images mentales d'objets à deux ou trois dimensions, de les manipuler et de s'en servir pour faciliter la résolution de problèmes.

L'élève peut résoudre des problèmes de mesure plus complexes tout en superposant des formes géométriques sur un plan cartésien. Par exemple, il ou elle peut aussi l'utiliser pour mieux comprendre le théorème de Pythagore en comparant les carrés des longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Certains élèves, aussi bien au **cycle moyen** qu'au **cycle intermédiaire**, ont des difficultés à visualiser des objets à deux ou trois dimensions, décomposés ou non, afin de résoudre des problèmes relatifs aux attributs *aire* et *volume* (Small et Lin, 2010, p. 89-90). L'enseignant ou l'enseignante du **cycle intermédiaire** peut offrir à l'élève un choix de **matériel concret** ou de **logiciel de géométrie dynamique** pour l'aider à mieux visualiser l'objet en question.

Le tableau suivant résume la façon dont sont définies au **cycle intermédiaire** ces deux habiletés spatiales dans le contexte de mesure et de géométrie.

<table>
<tr><th>Habileté</th><th>Exemple en mesure</th><th>Exemple en géométrie</th></tr>
<tr><td>Orientation spatiale

Habileté à se situer, à positionner des objets ou des figures dans un plan ou dans l'espace, et à effectuer ou à décrire des déplacements dans le plan et dans l'espace.</td><td>Déterminer la hauteur, en mètres, d'un objet inaccessible comme un mât de drapeau en utilisant le théorème de Pythagore.

</td><td>Décrire la position d'un bateau par rapport au port d'attache à partir d'une carte ayant les coordonnées d'un plan cartésien.

</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Visualisation

Habileté à se former et à décrire une représentation mentale de lieux, d'objets à deux et à trois dimensions, et de déplacements dans un espace bidimensionnel ou tridimensionnel.</td><td>Décomposer un solide complexe en solides simples, et les identifier afin de déterminer le volume total qui est la somme des volumes individuels. Par exemple, déterminer le volume intérieur d'une maison d'oiseaux.
</td><td>Dessiner les vues de face, de côté et de dessus du solide suivant.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Déterminer l'aire totale d'un cylindre. L'élève doit pouvoir visualiser les différentes faces du solide développé tel qu'illustré ci-contre. Par la suite, il ou elle peut déterminer l'aire du rectangle et l'aire du cercle.
</td></tr>
</table>

ENSEIGNEMENT EFFICACE DE LA GÉOMÉTRIE

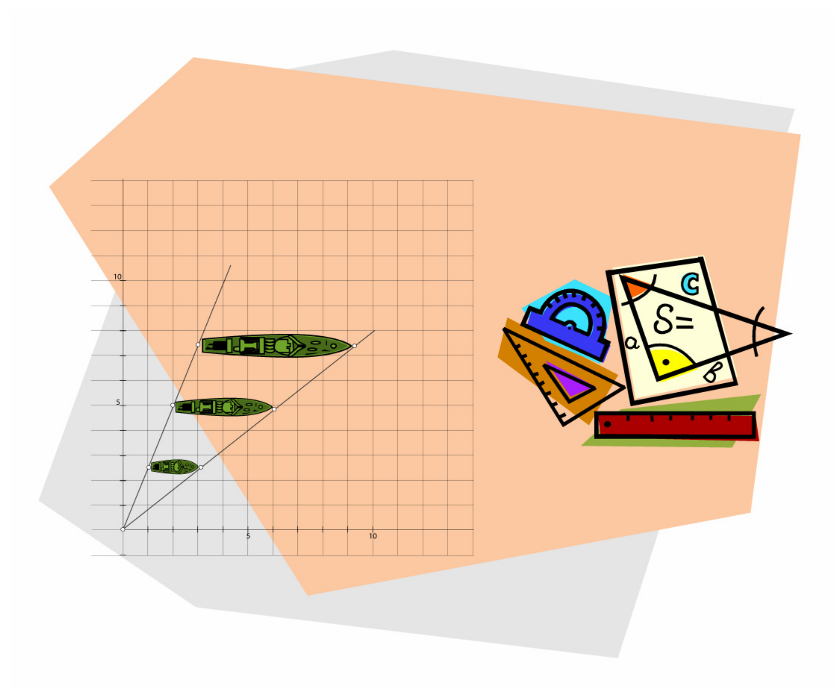
Les objectifs relatifs à la géométrie portent sur le sens de l'espace et les objectifs décrits dans les programmes-cadres de mathématiques.

Marian Small et Amy Lin présentent une progression des apprentissages en géométrie au **cycle intermédiaire**. L'élève commence par la décomposition de formes géométriques en deux et trois dimensions pour résoudre des problèmes d'attributs *longueur, aire* et *volume*. Il ou elle poursuit la résolution de problèmes complexes de géométrie et mesure, notamment les formes situées dans un plan cartésien, puis utilise le théorème de Pythagore pour relier les longueurs des côtés du triangle rectangle. Le développement des connaissances des transformations est approfondi en faisant appel au plan cartésien au complet. En 9e année, l'élève étudie les conditions nécessaires et suffisantes pour établir les propriétés des formes géométriques. (Small et Lin, 2010, p. 89-90, traduction libre)

L'enseignant ou l'enseignante du **cycle moyen** et du **cycle intermédiaire** intègre dans sa planification des situations d'apprentissage authentiques qui font appel aux **outils de manipulation** et à la **technologie**, et qui favorisent la compréhension des concepts en géométrie.

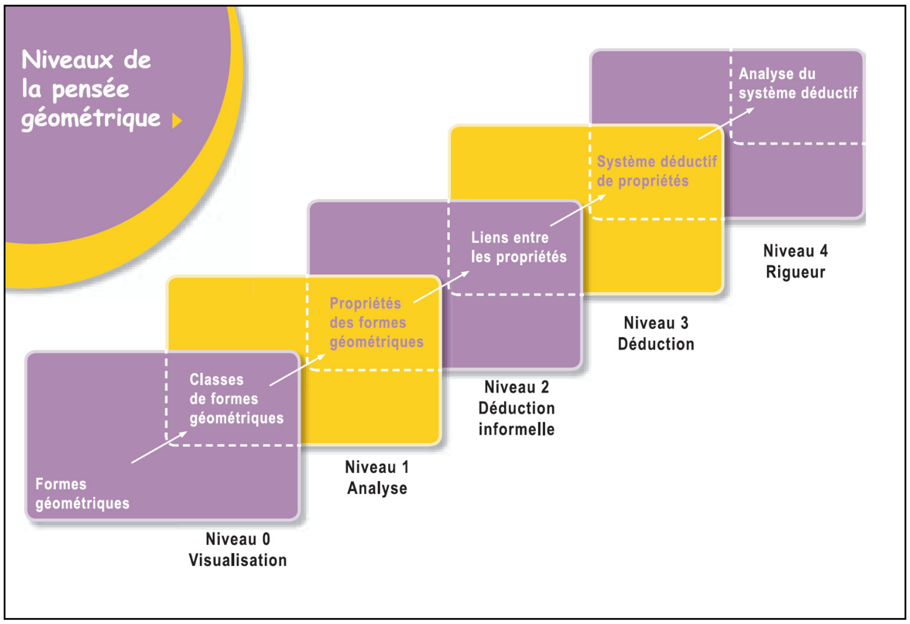
Dans ce qui suit, on présente :

Les niveaux de la pensée géométrique
Les transformations et le plan cartésien



NIVEAUX DE LA PENSÉE GÉOMÉTRIQUE

> *Même si les élèves doivent apprendre le vocabulaire propre à la géométrie, l'apprentissage de cette terminologie ne devrait pas constituer l'aspect principal du programme. L'accent devrait plutôt être mis sur l'exploration et la compréhension des rapports entre les figures et sur le développement de la pensée géométrique.*
>
> (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a, p. 9)



Traduit et adapté de Van de Walle et Folk, 2005, p. 329.

Deux chercheurs néerlandais, Dina van Hiele-Geldof et Pierre van Hiele, ont conçu un modèle à cinq niveaux pour décrire la compréhension des concepts géométriques à différentes étapes du développement de la pensée de l'élève. Une brève description de ces cinq niveaux ainsi que des exemples de comportements observables et d'activités pour chacun sont présentés dans le tableau suivant.[1]

[1] Il est important de retenir que les cinq niveaux de la pensée géométrique décrits par Dina van Hiele-Geldof et Pierre van Hiele ne sont aucunement liés aux quatre niveaux de rendement que l'on retrouve dans la grille d'évaluation du rendement du programme-cadre de mathématiques.

<table>
<tr><th>Description</th><th>Comportements observables</th><th>Exemples d’activités</th></tr>
<tr><td>Niveau 0 – Visualisation

Perception et classement des formes géométriques selon leur apparence</td><td>L’élève :

• utilise du vocabulaire géométrique;

• reconnaît, nomme, compare et reproduit des formes géométriques d’après leur apparence générale;

• a de la difficulté à se faire une représentation mentale d’une forme géométrique (Les formes sont observées, mais ne sont pas conceptualisées. Chacune est perçue de façon globale, comme une entité.);

• classe ou regroupe des formes géométriques qui se ressemblent.</td><td>Une première activité permet de reconnaître une forme géométrique plane simple.

1. Demander à l’élève d’identifier un exemple pour chacune des formes géométriques suivantes :
- Triangle
- Carré
- Rectangle

2. Demander à chaque élève de placer une image ou photo de leurs exemples dans un tableau de groupe classe.

Une deuxième activité permet de reconnaître et de classifier les différents types d’angles (angles droits, angles obtus et angles aigus).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Niveau 1 – Analyse

Début de l’analyse des formes géométriques pour en découvrir les propriétés</td><td>L’élève :

• reconnaît certaines propriétés communes et distinctes des formes géométriques;

• nomme les propriétés des formes géométriques, mais ne voit pas les sous-classes à l’intérieur d’une famille de polygones;

• généralise les propriétés d’une forme géométrique donnée à l’ensemble des formes géométriques de la même famille;

• classe les formes géométriques en fonction de leurs propriétés.</td><td>Cette activité permet de définir les types de triangles sans avoir à écrire et à mémoriser leurs définitions.

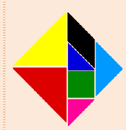
1. Remettre une série de triangles découpés (acutangles, rectangles, obtusangles; équilatéraux, isocèles et scalènes; et toute autre combinaison de ces catégories).

2. Demander aux élèves de classer tous les triangles en trois catégories (sans chevauchement) et expliquer leur choix.

3. Demander aux élèves de les classer de nouveau selon un différent critère.

4. Demander à l’élève de remplir, avec une illustration du triangle correspondant, un tableau synthèse comme celui qui figure ci-dessous afin d’illustrer les propriétés des triangles.

<table><tr><th></th><th>équilatéral</th><th>isocèle</th><th>scalène</th></tr><tr><td>rectangle</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>acutangle</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>obtusangle</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>
(Van de Walle et Lovin, 2008b, p. 210)</td></tr>
</table>

Niveau 2 – Déduction informelle Établissement de liens entre les formes géométriques et entre les propriétés d'une forme géométrique donnée.	**L'élève :** • déduit certaines des propriétés d'une forme géométrique; • reconnaît et établit des sous-classes de formes géométriques; • émet et vérifie certaines hypothèses; • comprend et utilise les relations d'inclusion et d'exclusion; • développe des listes de propriétés qui sont nécessaires et suffisantes pour décrire une forme géométrique quelconque; • formule des arguments mathématiques clairs et suffisants en utilisant le vocabulaire de causalité (p. ex., parce que, car, donc) et de conséquence logique (p. ex., si…alors, puisque… donc).	*Une première activité permet à l'élève d'utiliser son habileté visuelle en établissant des liens entre les formes géométriques et les propriétés géométriques de la forme résultante.* 1. Demander à l'élève de créer un *tangram* en forme d'un carré à partir de sept formes géométriques. Le matériel de manipulation peut servir d'appui. 2. Demander à l'élève de justifier, à l'aide d'arguments mathématiques clairs et suffisants, le choix des combinaisons de formes tout en utilisant le vocabulaire de causalité. Exemple de solution de *tangram* en forme de carré :  Ci-dessous est **un exemple d'argument formulé** par l'élève pour justifier une des propriétés de son *tangram*. **Si** je place le triangle rose contre le triangle rouge, deux triangles semblables et rectangles, **alors** les angles correspondants formeront un angle droit. (Small et Lin, 2010, p. 94) *Une deuxième activité permet à l'élève d'établir les listes des propriétés nécessaires et suffisantes des quadrilatères (parallélogramme, losange, carré, rectangle et trapèze).* 1. Placer les élèves en équipe et assigner une figure à chaque équipe. 2. Remettre une copie de la liste complète de toutes les propriétés des quadrilatères. 3. Demander aux élèves de déterminer lesquelles des propriétés sont essentielles pour définir leur figure. Cette activité peut être refaite en ayant recours à **la technologie** (utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique) en demandant à l'élève de générer un quadrilatère et de vérifier les propriétés nécessaires et suffisantes qui définissent la forme choisie. (Van de Walle et Lovin, 2008b, p. 217)
Niveau 3 – Déduction Étude des définitions, des preuves, des	**L'élève :** • présente une preuve sans se limiter à la mémorisation;	*Cette activité permet à l'élève de découvrir le théorème de Pythagore. L'enseignant ou l'enseignante devrait préparer à l'avance des triangles ayant des longueurs de côtés correspondant aux triplets de Pythagore (p. ex., 3, 4, 5 ou 6, 8, 10.). Il ou elle doit aussi*

théorèmes, des axiomes et des postulats	• prouve un énoncé de différentes façons; • comprend les sous-classes de formes géométriques et leurs relations.	*considérer la taille de* ***l'outil de manipulation*** *accessible (carreaux géométriques, cubes emboitables, etc.).* 1. Remettre à chaque élève une feuille avec un triangle rectangle tracé. 2. Demander à l'élève de créer des carrés à l'aide du matériel fourni et de déterminer les aires de ceux-ci. 3. Laisser l'élève découvrir la relation entre ces aires et le théorème de Pythagore. 4. Remettre une feuille avec un triangle non rectangle. 5. Demander à l'élève de répéter les étapes 2 et 3 pour prouver que la relation découverte reste vraie pour tout triangle rectangle. 6. L'élève doit communiquer sa conclusion tout en expliquant les étapes suivies et le raisonnement appliqué.
Niveau 4 – Rigueur Étude de la géométrie de façon abstraite	L'élève : • utilise des systèmes déductifs abstraits; • travaille avec la géométrie non euclidienne; • fait les liens entre les concepts et développe parfois de nouveaux postulats.	Note : Ce niveau n'est pas atteint au **cycle intermédiaire**.

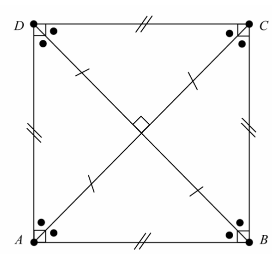
Tiré et adapté de Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 13-14.

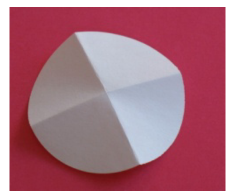
Selon la théorie de Dina van Hiele-Geldof et Pierre van Hiele, l'élève du **cycle intermédiaire** passe par chacun des niveaux (*visualisation, analyse, déduction informelle et déduction*) pour chaque nouveau concept. Il ou elle peut donc être au niveau 1 (*analyse*) par rapport à un concept et au niveau 0 (*visualisation*) par rapport à un autre. À titre d'exemple, un ou une élève peut être capable de décrire certaines propriétés du carré (niveau 1), mais incapable de fournir une liste complète des propriétés nécessaires et suffisantes pour les quadrilatères (niveau 2). L'élève peut progresser d'un niveau de pensée à un autre dans la mesure où il est exposé à des activités qui misent sur la comparaison et la classification des formes géométriques, et sur l'analyse de leurs propriétés. L'enseignant ou l'enseignante qui sait reconnaître à quel niveau de pensée se situent ses élèves par rapport à un concept donné d'après certains comportements observables est davantage en mesure de les aider à comprendre ce concept et à les faire cheminer vers un niveau de pensée plus élevé.

Il faut noter que le curriculum de mathématiques de l'Ontario permet à l'élève du **palier élémentaire** d'atteindre les niveaux de *visualisation, analyse* et *déduction informelle*. En 9e année seulement, certaines attentes et certains contenus en *Mesure et géométrie* permettent à l'élève d'atteindre le niveau de *déduction* (niveau 3). Ce niveau et le niveau de *rigueur* (niveau 4) sont davantage atteignables au **palier secondaire** et lors des études postsecondaires.

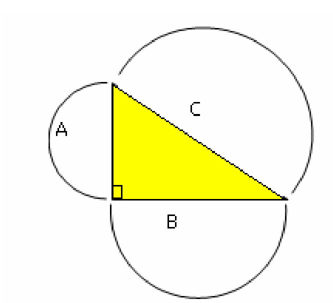
D’ailleurs, un des contenus d’apprentissage du domaine de *Mesure et géométrie* du cours théorique de 9e année précise que l’élève doit « confirmer des énoncés à l’aide d’un logiciel de géométrie dynamique ou de plusieurs exemples ou les infirmer au moyen d’un seul contre-exemple (p. ex., si un quadrilatère a des diagonales perpendiculaires, c’est un carré : confirmer ou infirmer). » (Ministère de l’Éducation de l’Ontario, 2005b, p. 35)

L’élève fait preuve d’un raisonnement déductif, soit de *déduction* (niveau 3), lorsqu’il ou elle prouve de différentes façons les propriétés géométriques nécessaires et suffisantes pour avoir un carré, sans se limiter à la définition. D’une part, l’élève peut utiliser un **logiciel de géométrie dynamique** pour créer un carré à partir d’un disque et démontrer que les diagonales de la forme résultante sont perpendiculaires. D’autre part, l’élève peut tracer deux droites perpendiculaires et construire un quadrilatère qui résulte en un carré.





Un exemple d’activité d’apprentissage traitant du théorème de Pythagore permet à l’élève d’atteindre le niveau de *déduction* (niveau 3). Après avoir exploré et découvert le théorème de Pythagore à l’aide de **matériel concret** comme c’est décrit dans le tableau à la page 8, l’élève est en mesure de le prouver d’une autre façon. La compréhension de la relation entre les aires des carrés formés à partir des longueurs des côtés du triangle rectangle amène l’élève à faire un transfert à un autre type de figure et aux propriétés de son aire. Cet autre type de figure pourrait être des demi-cercles, dont les diamètres correspondent aux côtés des triangles rectangles. Lorsqu’il ou elle atteint ce niveau, l’élève a acquis les connaissances et les habiletés nécessaires pour satisfaire au contenu d’apprentissage suivant : « *communiquer et justifier les étapes de son raisonnement au moyen d’arguments convaincants et à l’aide du vocabulaire approprié.* » (Ministère de l’Éducation de l’Ontario, 2005b, p. 35)



L’élève vérifie que la somme des aires des demi-cercles A et B est égale à l’aire du demi-cercle C.

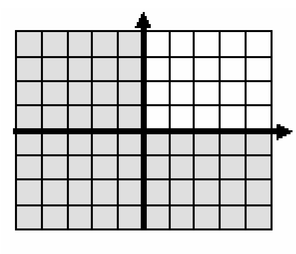
TRANSFORMATIONS ET PLAN CARTÉSIEN

> ***Transformation.*** *Opération qui, à partir d'une règle donnée, consiste à faire correspondre tout point du plan à une et une seule image (p. ex., la translation, la rotation, la réflexion et l'homothétie sont des transformations).*
>
> (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 61)

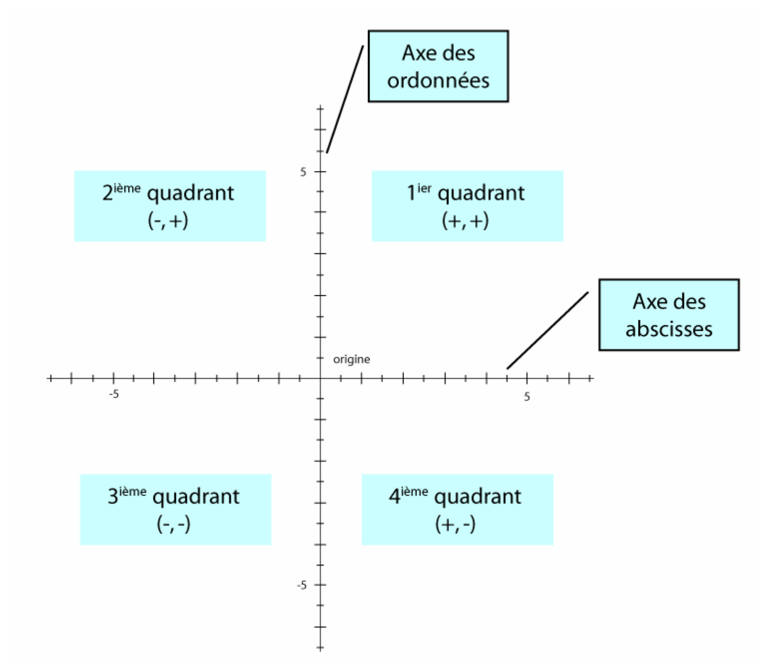
Au **cycle moyen**, l'élève utilise seulement le premier quadrant du plan cartésien pour les transformations. Comme l'élève du **cycle intermédiaire** est capable d'utiliser les entiers négatifs, il ou elle progresse dans son,apprentissage des transformations en déplaçant un objet ou une figure, soit physiquement, mentalement ou virtuellement (à l'aide de **logiciel de géométrie dynamique**), sur les quatre quadrants du plan cartésien. (Van de Walle et Lovin, 2008b, p. 234)

Voici un exemple de plan cartésien :

Axe des y



Axe des x



Seul le premier quadrant est étudié au **cycle moyen** alors qu'à partir du **cycle intermédiaire**, l'élève doit pouvoir localiser et déplacer des figures dans les quatre quadrants.

L'enseignante ou l'enseignant propose des activités à l'élève dans le cadre desquelles les coordonnées sont utilisées pour examiner les transformations euclidiennes de rotation, de translation et de réflexion et *non-euclidienne* telle que l'homothétie. Van de Walle et Lovin (2008b, p. 234) suggère des activités de découverte en géométrie afin que l'élève établisse une relation entre les coordonnées des sommets d'une figure, celles de son image et la transformation en question. Cette approche d'exploration favorise un apprentissage plus concret pour l'élève puisqu'il ou elle établit la relation entre les coordonnées et les transformations plutôt que de mémoriser une série de règles.

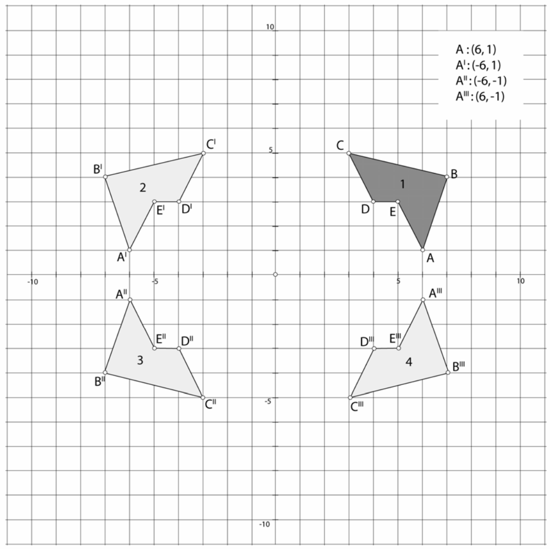


Figure 7.32

Après avoir effectué une réflexion de la figure 1 (ABCDE) par rapport à l'axe des *y*, faire une réflexion à la fois de la figure 1 et de la figure 2 par rapport à l'axe des *x*.

(Van de Walle et Lovin, 2008b, p. 234)

Il est important de noter que l'homothétie est un concept qui permet à l'enseignant ou l'enseignante d'établir un lien avec le domaine de *Numération et sens du nombre* qui traite des rapports et des taux équivalents. Le fait d'utiliser le plan cartésien comme cadre pour illustrer la transformation permet à l'élève de mieux visualiser les rapports, les taux et les proportions en voyant l'effet sur les coordonnées des sommets d'une figure lorsqu'on les multiplie par un entier ou une fraction pour trouver les points de l'image correspondante. Une des revues du National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) présente une activité qui fait appel à l'utilisation de **logiciel de géométrie dynamique** afin d'appuyer l'élève dans le développement de son orientation spatiale et de sa visualisation. (Mamolo, Sinclair et Whiteley, 2011)

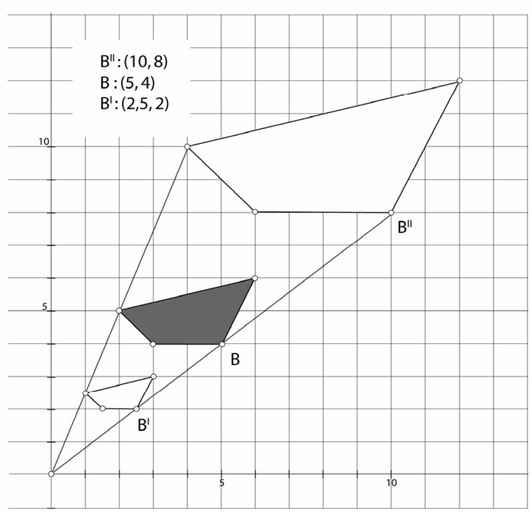
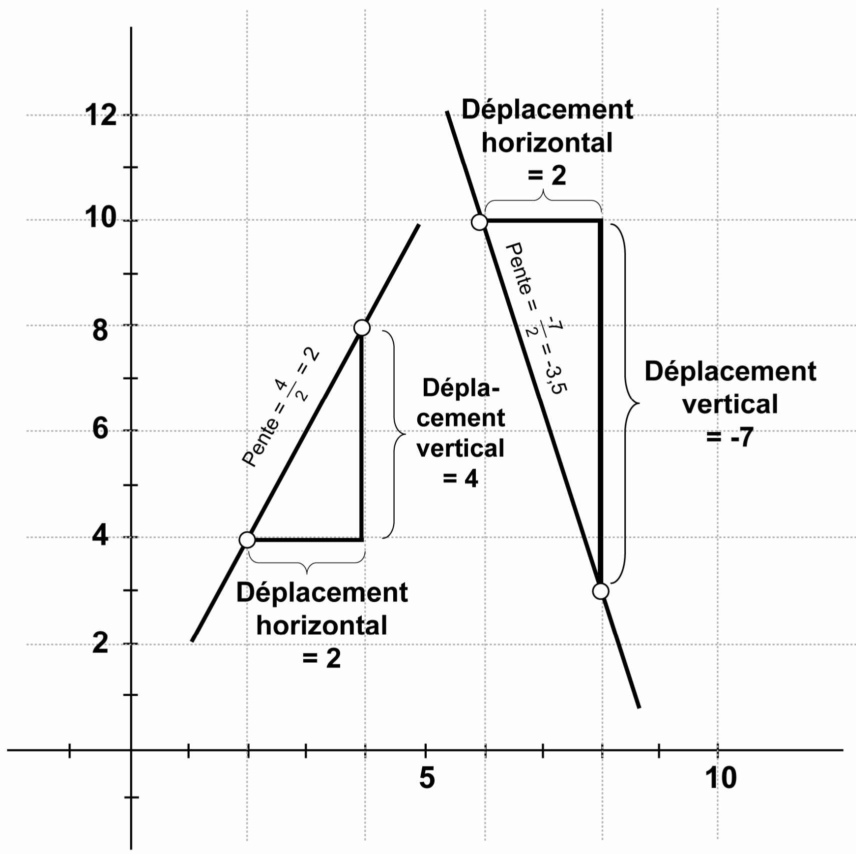


Figure 7.33

Homothéties dans un plan cartésien. Multiplier les coordonnées des points de la figure du centre par 2, puis par 0, 5 afin de créer respectivement les deux autres figures.

(Van de Walle et Lovin, 2008b, p. 236)

La compréhension des différences entre les transformations facilite le développement de l'habileté à visualiser la position de l'image d'une figure à la suite d'une ou de plusieurs transformations. En proposant une variété d'activités relatives aux transformations, l'enseignante ou l'enseignant aide l'élève à développer son habileté de visualisation. Cette idée de position et déplacement d'un point sur un plan cartésien progresse lorsque l'élève aborde le concept de la pente d'une droite et de la mesure de l'inclinaison d'une droite. Dans le domaine de géométrie analytique du cours théorique de 9e année, l'élève doit déterminer la pente d'une droite sur un plan cartésien en considérant le déplacement vertical et horizontal entre deux points quelconque.



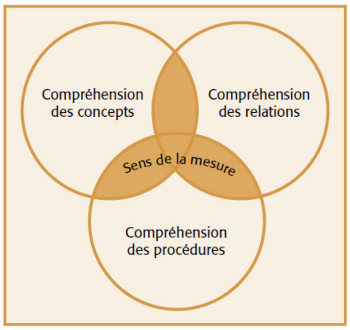
(Van de Walle et Lovin, 2008b, p. 238)

Figure 7.35

La pente d'une droite se définit comme le déplacement vertical ÷ le déplacement horizontal.

ENSEIGNEMENT EFFICACE DE LA MESURE

> *Au cours des premières années d'école, on présente d'abord la mesure comme une comparaison (p. ex., plus long que, plus court que). Ensuite, au cours des années subséquentes, des concepts en mesure plus complexes se développent. Ces premiers concepts misent sur la compréhension des attributs longueur, aire et volume, et sur l'utilisation d'unités de mesure non conventionnelles pour mesurer et comparer.*
>
> (Outhred, Mitchelmore, McPhail et Gould, 2003, p. 81, traduction libre)



Le schéma ci-contre illustre le lien étroit qui existe entre le développement du sens de la mesure et la compréhension des concepts, des relations et des procédures. Il importe que l'enseignant ou l'enseignante maintienne dans sa programmation en mesure un équilibre entre la construction des concepts, l'établissement des relations et l'utilisation des procédures. (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010, p. 82)

Attribut : caractère particulier d'un être, d'une chose.

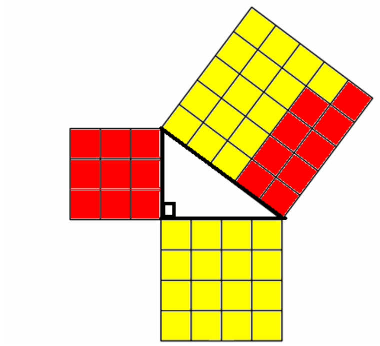
L'enseignement du domaine *Mesure* au **cycle moyen** vise à développer le sens de la mesure tout en comprenant les attributs et les concepts fondamentaux de ce domaine. C'est également l'occasion d'établir des relations entre certains de ces attributs pour faciliter les conjectures, les généralisations et les procédures de l'acte de mesurer.

Formule. Expression concise, générale et souvent symbolique qui définit avec précision les relations fondamentales entre des termes qui entrent dans la composition d'un tout. (Ministère de l'éducation de l'Ontario, 2005a, p. 96)

L'enseignement de ce domaine au **cycle intermédiaire** permet à l'élève d'approfondir cette compréhension du sens de la mesure pour les attributs *longueur, aire* et *volume*. Il ou elle est amené à découvrir des formules utilisées pour déterminer des mesures de figures planes et de solides complexes afin de les comprendre, et ainsi pour les appliquer dans diverses situations de résolution de problèmes où des réponses approximatives et exactes sont demandées.

Le théorème de Pythagore est introduit au **cycle intermédiaire** par le biais de l'exploration et la découverte. L'élève applique le théorème de Pythagore dans des situations de résolution de problèmes.

Pour favoriser le passage à l'abstrait du théorème de Pythagore, il est recommandé de débuter avec une activité de découverte et la représentation concrète en utilisant du **matériel de manipulation** tel que les carreaux géométriques ou les cubes emboitables et **la technologie.** Par la suite, l'élève peut laisser des traces semi-concrètes de son raisonnement et de ses étapes. Ceci facilite aisément le passage au symbolique et à la formule générale algébrique.



L'enseignant ou l'enseignante du **cycle moyen** et du **cycle intermédiaire** présente des situations d'apprentissage authentiques qui favorisent le développement du sens de la mesure et l'acquisition de certaines habiletés essentielles en mesure.

SENS DE LA MESURE

Chez certains élèves, le sens de la mesure semble inné. Cependant, les recherches démontrent que tout élève peut développer ce sens par l'entremise d'activités d'apprentissage qui intègrent la manipulation de matériel concret et l'utilisation d'unités de mesure non conventionnelles et conventionnelles. Le développement du sens de la mesure dépasse l'apprentissage d'habiletés et de procédures relatives à l'acte de mesurer et à l'application de formules mathématiques. Il constitue un cheminement structuré et organisé qui évolue et qui doit être adapté aux divers attributs mesurables d'un objet. (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010, p. 39-43)

Le schéma suivant résume les compétences et habiletés que l'élève acquiert lorsqu'il ou elle développe un sens de la mesure.

Adapté à partir du Guide d'enseignement des mathématiques de la 4e à la 6e année – Mesure (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010, p. 8)

Pour bien cerner la portée du sens de la mesure dans le processus de développement d'une compréhension des concepts, des relations entre les attributs, des procédures et des habiletés de résolution de problèmes en mesure, il importe de s'attarder aux éléments suivants :

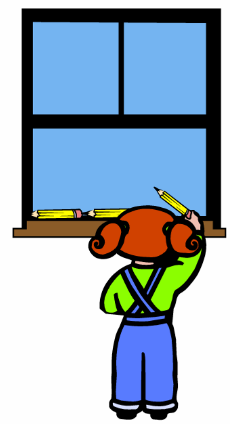
- la progression de l'utilisation des repères et des unités de mesure;
- l'estimation de valeurs de mesure;
- l'exactitude et l'approximation de valeurs de mesure.

Progression de l'utilisation des repères et des unités de mesure

> *Les repères sont de puissants véhicules d'apprentissage des concepts en mesure et de développement du sens de la mesure.*
>
> (Joram, 2003, p. 66, traduction libre)

Itération : l'acte de placer, à plusieurs reprises et d'une manière ordonnée, une même unité de mesure de façon de déterminer la mesure d'un attribut quelconque.

Au cycle primaire, l'utilisation de repères permet à l'élève de donner un sens qui lui est familier à la mesure des objets dans son environnement. Par exemple, il ou elle peut déterminer la largeur d'une fenêtre de la classe comme étant 10 fois la longueur d'un crayon. Par le biais du processus d'itération mécanique ou mentale, l'élève apprend très tôt qu'une grandeur n'est pas un tout mais une somme de parties plus petites.



« À quoi penses-tu lorsque tu t'imagines une distance de 1 500 mètres? »

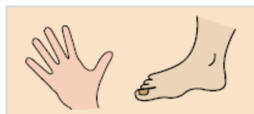
(C'est presque 4 fois le tour de la piste de course l'école.)

Au cycle moyen, l'élève continue d'utiliser des repères concrets, tels les parties du corps, le matériel de manipulation ou les objets personnels, jusqu'à ce qu'il ou elle soit prêt à construire et à maintenir des images mentales précises. Par exemple, un enfant aurait de la difficulté à saisir la distance entre sa maison et l'école si on lui dit qu'elle est de 5 km, mais si un parent lui explique que cette distance est environ cinq fois la distance de sa maison au parc, l'enfant serait plus en mesure de comprendre puisque celui-ci a déjà une image mentale de la grandeur cette mesure. Selon son stade de développement, l'élève peut percevoir l'unité comme un objet particulier, sans en comprendre pleinement le sens dans le cadre du système de mesure.

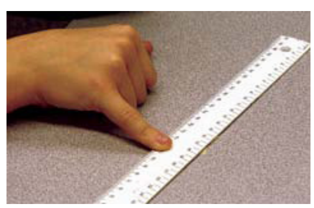
Il est avantageux de faire appel à des repères familiers qui peuvent rendre le sens de l'attribut plus accessible aux élèves. L'utilisation d'un dé, qu'on retrouve couramment dans les jeux de société, pour mesurer l'attribut *volume* est un bel exemple de repère familier. L'élève peut donc associer facilement cet objet et sa mesure à environ un centimètre cube.

Les recherches recommandent au personnel enseignant d'appuyer l'élève dans le développement d'un répertoire contenant une panoplie de repères pour un même attribut, ce qui lui permettrait de faire des choix raisonnés du repère à utiliser dépendamment de l'objet et l'attribut à mesurer. (Joram, 2003, p. 58-59, traduction libre)

Même s'il est encouragé d'utiliser des parties du corps comme repère au **cycle primaire** et au **cycle moyen**, ceux-ci ne sont pas toujours des repères idéaux. Par exemple, à l'adolescence, la variation de mesure résultant de la croissance rapide de la taille de la plupart des élèves peut souvent être inégale. Ainsi, au **cycle intermédiaire**, il est souhaitable que l'élève associe facilement des repères familiers à des unités de mesure conventionnelle. Il ou elle se trouve à une phase de développement propice pour l'apprentissage de divers concepts et « les connexions neurologiques se font mieux lorsqu'elles sont encore malléables (plasticité).» (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2009, Monographie # 6, p. 2)



Joram (2003, p. 57-67, traduction libre) propose des étapes à l'apprentissage du système de mesure. Selon elle, à cette étape de l'apprentissage, l'élève peut situer ses repères personnels à l'intérieur d'un système de mesure et établir des relations entre diverses unités de mesure conventionnelles d'un même attribut. Par exemple, l'élève associe maintenant la largeur de son auriculaire comme étant un centimètre, ce qui est un centième d'un mètre, à l'intérieur du système métrique de l'attribut *longueur.*



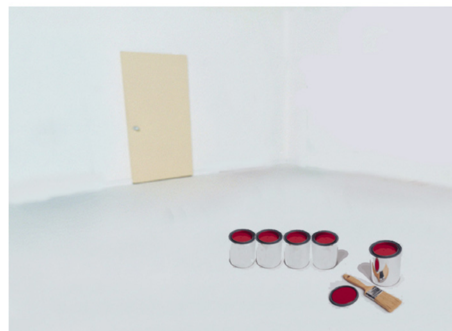
Une fois les systèmes d'unités conventionnels compris, l'élève peut alors comprendre le lien entre les multiples ou les diviseurs de l'unité de base. Par exemple, pour l'attribut *volume*, le mètre cube (m^3) est l'unité de mesure du Système international dont le millimètre cube (mm^3) est une division et le kilomètre cube (km^3) est un multiple.

Bien que le concept de mesure soit introduit au **cycle moyen**, c'est au **cycle intermédiaire** que l'élève est davantage prêt, par exemple, à approfondir sa connaissance de la relation inverse de la mesure d'un attribut qui stipule que le nombre d'unités requis pour déterminer la mesure d'un attribut est inversement proportionnel à la grandeur de l'unité de mesure utilisée. (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010, p. 60)

Estimation

> *Pour certains, estimer n'est rien de plus que deviner. […] Cependant, associer l'estimation au simple fait de deviner, c'est nier le raisonnement qui la sous-tend. Formuler une estimation précise requiert souvent le recours à des stratégies de résolution de problèmes complexes et à l'application judicieuse de principes mathématiques.*
>
> (Hodgson, Simonsen, Luebeck et Andersen, 2003, p. 226, traduction libre)

« Les adultes, tout comme les élèves, doivent déterminer des mesures de façon approximative dans une variété de situations quotidiennes; autrement dit, ils doivent estimer. En mesure, estimer est un processus fondé sur des renseignements visuels et sur des expériences antérieures qui permet de porter un jugement par rapport à la grandeur approximative d'un attribut quelconque (p. ex., longueur, aire, temps) sans recourir formellement à une stratégie de mesure. » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010, p. 17)



Par exemple, on peut estimer l'aire totale des murs d'une pièce pour déterminer le nombre minimal de bidons de peinture nécessaire à la rénovation de la pièce. Ici, l'élève devra porter un jugement sur son estimation pour acheter le nombre de bidons nécessaires pour peindre la surface totale des murs.

Même si certains élèves peuvent démontrer de piètres habiletés en estimation entre les murs de l'école, ils ou elles sont souvent capables de faire des estimations rapides dans leur quotidien. Par exemple, un élève réussit à lancer une balle avec précision et traverse une rue qui a beaucoup de circulation sans se blesser mais estime que la longueur approximative d'une molécule devrait être d'environ un mètre, sans réfléchir à la vraisemblance de cette mesure (Sousa, 2010, p.103).

Sousa propose trois facteurs qui font en sorte qu'un élève estime avec difficulté des mesures numériques. Le tableau suivant décrit ces trois facteurs.

Facteurs menant aux difficultés d'estimation de mesures numériques

Facteur 1 Les pratiques courantes	**Facteur 2** L'utilisation de la calculatrice	**Facteur 3** Le temps
Dès un jeune âge, l'élève est appelé à trouver une réponse exacte aux problèmes et les quelques occasions où l'on demande une réponse approximative, on exige également une réponse exacte. On décourage donc l'élève à croire que l'estimation n'est pas suffisante puisqu'on exige aussi la réponse exacte.	Cet outil, autant valable qu'il est, peut mener à l'erreur. Par exemple, l'élève néglige une virgule ce qui fait que la réponse est erronée mais l'élève ne questionne pas cette réponse dû à une confiance aveugle à la machine.	L'estimation nécessite souvent du temps à réfléchir et sachant que le temps pose souvent des défis, l'élève cherche à répondre rapidement et évite donc l'estimation.

Pour contrer ces facteurs, Sousa suggère de présenter des situations d'apprentissage qui encouragent l'élève à estimer et à déterminer des valeurs de mesures approximatives. Également, Van de Walle et Lovin (2008b, p. 254), ajoutent que l'estimation dans les activités de mesure ont leur place puisque l'estimation :

• met l'accent sur l'attribut à mesurer (p. ex., pour estimer le volume d'une boîte fermée à l'aide de cubes emboîtables, il faut d'abord penser à la relation entre la signification de volume et de capacité, puis visualiser une façon d'utiliser les cubes emboîtables comme unité de mesure de la capacité);

• favorise la motivation intrinsèque (p. ex., l'élève veut vérifier à quel point son estimation du volume d'une canette cylindrique est juste);

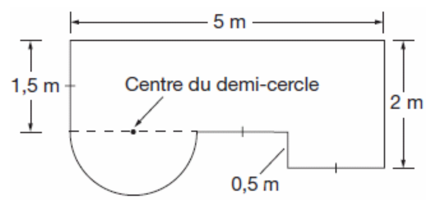
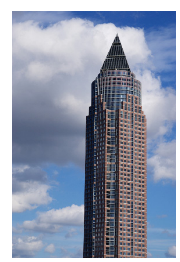
Dans le cas d'un contenant, il faut différentier son volume extérieur de son volume intérieur (capacité).

• permet de se familiariser avec les unités de mesure conventionnelles (p. ex., pour estimer la superficie d'une ville, il faut concevoir un repère qui correspond à un kilomètre carré).

Selon Marian Small et Amy Lin, des questions ouvertes encouragent la réflexion et permettent à chaque élève d'offrir une réponse à son niveau de compréhension. Par exemple, l'enseignant ou l'enseignante peut demander à l'ensemble de la classe de décrire une situation où une valeur estimée de la circonférence ou de l'aire d'un cercle est utilisée plutôt qu'une valeur exacte. Ce type de question ouverte demande une certaine réflexion de la part de chaque élève. L'échange mathématique pourrait permettre de ressortir une variété d'idées et d'enrichir le dialogue (Small et Lin, 2010, p. 125).

Au **cycle moyen**, l'élève a appris à utiliser différentes stratégies d'estimation dans des situations de résolution de problème en employant des unités de mesure non conventionnelles et conventionnelles. Au **cycle intermédiaire**, l'enseignante ou l'enseignant continue à en encourager l'utilisation et modeler l'emploi de telles stratégies lorsque la situation le permet. Van de Walle et Lovin (2008a, p. 296-297) proposent l'enseignement de quatre stratégies d'estimation. Ci-dessous figurent des exemples de stratégies développées au **cycle moyen** mais pouvant être adaptées pour l'élève au **cycle intermédiaire** (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010, p.18-19).

Stratégie	Exemple
Utiliser des repères qui représentent des unités de mesure importantes L'élève qui s'est constitué un répertoire de repères et qui l'utilise régulièrement réussit à estimer avec plus d'efficacité et de facilité. L'estimation de la mesure de l'attribut se fait en le comparant à un repère.	Pour estimer la quantité de gazon requise pour recouvrir un terrain de soccer, l'élève peut utiliser le repère d'une unité de 1 mètre carré pour calculer l'aire du terrain. Il s'agit de voir mentalement combien de mètres carrés sont nécessaires pour recouvrir le terrain.

	Pour estimer le volume d'un contenant, l'élève peut utiliser un sac de lait comme repère pour environ un litre.  Il s'agit de calculer mentalement le nombre de sacs de lait nécessaires pour remplir le contenant.
Décomposer l'objet en parties Dans certains contextes, il est plus facile d'estimer la grandeur d'un objet en estimant d'abord la grandeur de plus petites sections facilement identifiables. L'estimation de la mesure de l'attribut correspond à la somme de la grandeur de chacune des sections.	Pour estimer la quantité de gazon requise pour recouvrir le terrain ci-dessous, l'élève peut déterminer l'aire totale du terrain comme étant la somme des aires de chacune des parties qui le composent. Il existe plusieurs possibilités de découpage. 
Utiliser des subdivisions Si l'objet à mesurer ne comporte pas d'éléments qui suggèrent une façon de le décomposer en parties, on peut d'abord le diviser mentalement ou concrètement en demis. On peut ensuite diviser une de ces moitiés à nouveau en demis et répéter ainsi le processus jusqu'à l'obtention d'une section dont on peut estimer la mesure.	Pour estimer la hauteur d'une grande tour, l'élève peut la réduire en deux, et ce de manière répétitive jusqu'à ce qu'il ou elle obtient une hauteur équivalente à celle d'un étage ordinaire. Il ou elle lui suffit alors d'estimer la hauteur de cet étage, puis de multiplier le résultat par le nombre d'étages ainsi déterminés. 
Faire des itérations mentalement ou concrètement L'itération désigne l'acte de placer, à plusieurs reprises et d'une manière ordonnée, une même unité de mesure de façon à déterminer la mesure d'un attribut quelconque. L'estimation de la mesure de l'attribut correspond au nombre de fois que l'unité est placée.	Pour estimer la quantité de limonade pouvant être servie lors d'une fête à l'école, l'élève peut avoir recours à une grande carafe. Il s'agit de calculer mentalement le nombre de verres nécessaires pour remplir le contenant. 

Exactitude et approximation

> ***Valeur exacte.*** *Valeur qui s'exprime habituellement à l'aide de signes comme π ou $\sqrt{2}$ (p. ex., la circonférence d'un cercle de diamètre 2 unités a une valeur exacte de 2π unités et la valeur approximative de cette circonférence est de 6,283 unités).*
>
> (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a, p. 61)

Au **cycle intermédiaire**, on retrouve l'idée de valeur approximative lorsque l'élève utilise le théorème de Pythagore. En effet, lorsque la valeur de l'aire d'un carré formé à partir d'un des côtés du triangle ne correspond pas à un carré parfait (p. ex., l'hypoténuse d'un triangle rectangle de cathètes ayant une longueur d'une unité a une valeur exacte de $\sqrt{2}$ soit une valeur approximative de 1,414), cette valeur peut être ou non approximée.

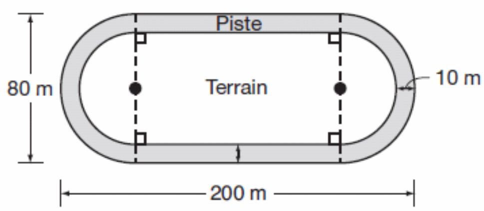
Les exemples suivants illustrent des situations d'applications où l'élève du **cycle intermédiaire** est appelé à trouver une valeur exacte :

Exemple 1

Joseph s'entraine pour une course d'athlétisme.

Il a couru une distance de 490 m en suivant l'extérieur de la piste.

A-t-il réussi à faire un tour de piste complet?



En faisant une approximation de *pi* (π) au centième près (3,14), l'élève doit comprendre que la distance parcourue est insuffisante pour faire un tour de la piste complet. Si on demande à l'élève de calculer la longueur exacte de la piste, il ou elle doit utiliser la valeur exacte de *pi* (π) et non une valeur approximative.

Exemple 2

Marie-Josée désire déterminer le diamètre exact d'une pièce de monnaie en or ayant une aire de 25π unités carrées. Laquelle des réponses suivantes est correcte?

A) 10 unités

B) 15,7 unités

C) 15,708 unités

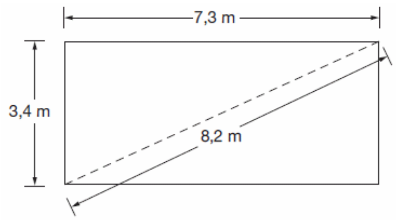
D) 5π unités

Cet exemple est intéressant puisque très souvent l'élève croit qu'en ayant plusieurs nombres après la virgule, celle-ci est la valeur exacte. C'est difficile pour l'élève d'accepter une réponse contenant un symbole comme une réponse exacte.

Les questions à choix de réponses demeurent utiles à des moments précis. Elles permettent à l'élève d'avoir une rétroaction immédiate. Aussi, chaque leurre permet à l'enseignant d'identifier une difficulté précise.

EXEMPLE 3

Amélie désire déterminer si deux murs adjacents de sa chambre sont bien à angle droit. Elle mesure la longueur des murs et la diagonale de sa chambre et indique les valeurs obtenues au dixième près sur une figure (voir ci-après).



Détermine si les murs sont à angle droit.

Justifie ta réponse.

Ce problème nécessite une compréhension du théorème de Pythagore. L'élève applique le théorème et détermine la valeur d'une longueur à partir de 2 des longueurs données et conclut que les murs ne forment pas un angle droit. Cet exemple peut bien être utilisé pour engager une discussion sur les valeurs approximatives.

Il est important d'exposer l'élève à des situations où une valeur approximative est suffisante pour comprendre et résoudre un problème. Malgré l'éventuelle difficulté qui est souvent associée à l'utilisation d'une valeur approximative ou d'une estimation, une valeur approximative peut permettre parfois de mieux comprendre une situation qu'une valeur exacte.

HABILETÉS RELATIVES À LA GÉOMÉTRIE ET À LA MESURE

Selon les programmes-cadres de mathématiques, « Les processus mathématiques constituent les éléments essentiels d'une formation mathématique puisqu'ils appuient l'acquisition et la mise en application de la connaissance et des habiletés mathématiques. » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 11)

Les programmes-cadres de mathématiques identifient sept processus :

a) la résolution de problèmes
b) la communication
c) la réflexion sur le caractère raisonnable des résultats
d) le raisonnement
e) l'établissement de liens
f) la sélection d'outils technologiques ou de matériel approprié
g) la modélisation

L'enseignant ou l'enseignante doit amener l'élève à développer ces processus « en présentant une gamme de problèmes qui font appel à tous les processus mathématiques. » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a, p. 17 et 2005b, p. 11)

Les habiletés spécifiques à la mesure et la géométrie sont développées ci-dessous.

Habileté à résoudre une situation-problème

En tant que processus mathématiques, la résolution de problèmes fait partie intégrante de l'apprentissage des mathématiques. Son importance dans l'approfondissement de la réflexion et de la construction du savoir ne fait plus l'objet d'un débat.

« La résolution de problèmes focalise l'attention de l'élève sur ses idées ainsi que l'acquisition d'un sens mathématique. Résoudre des problèmes exige de réfléchir sur les idées mathématiques inhérentes aux problèmes. Ce faisant, les élèves ont plus de chances d'intégrer les idées émergentes aux idées existantes, ce qui améliore la compréhension. » (Van de Walle et Lovin, 2008b, p. 14)

Si les mathématiciens et mathématiciennes font une différence entre une situation de résolution de problèmes et un exercice d'application mathématique (ou problème tout court), la pratique dans les salles de classe est loin de refléter cette différence.

L'enseignant ou l'enseignante est conscient qu'en se limitant uniquement aux activités contenues dans les manuels pédagogiques, très centrées sur l'application plus tôt que sur le raisonnement, il ou elle prive les élèves d'opportunités de faire les mathématiques autrement.

« Une activité de résolution de problème peut exiger un effort soutenu chez l'élève, sans pour autant que la solution soit hors d'atteinte, tout en lui permettant de constater qu'il peut y avoir plus d'une façon d'arriver à la solution. Le travail en collaboration avec ses camarades peut s'avérer efficace surtout lorsque la complexité de la tâche assignée se situe au-delà du niveau des connaissances de l'élève. Les activités menant à la résolution d'un problème ne devraient nullement être circonscrites autour d'une solution unique, d'une seule façon de faire ou d'un travail en solitaire. »

(Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a, p. 18)

Voici, en résumé, quelques caractéristiques des deux pratiques utilisées en classe :

Exercice d'application	Résolution de problèmes
- Appel à la mémoire	- Analyse de la situation
- Exécution de procédures, de formules	- Interprétation des données
- Solution unique	- Établissement d'un plan
- Recours à un nombre limité de stratégies	- Évaluation du processus et du résultat
	- Recours à plusieurs stratégies

Habileté à visualiser

> *L'habileté à visualiser est un processus qui permet à l'élève de se représenter des concepts abstraits sous forme d'images mentales. Ces images lui permettent de manipuler les concepts, de les rendre signifiants et de se les approprier.*
>
> (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010, p. 20)

L'habileté à visualiser est essentielle à la compréhension de la mesure et de la géométrie. Cette habileté est nécessaire pour créer des images mentales d'objets à deux dimensions ou à trois dimensions, de les manipuler et de s'en servir pour faciliter la résolution de problèmes. Par exemple, en mesure, cette habileté est surtout liée à la capacité de se faire une image mentale :

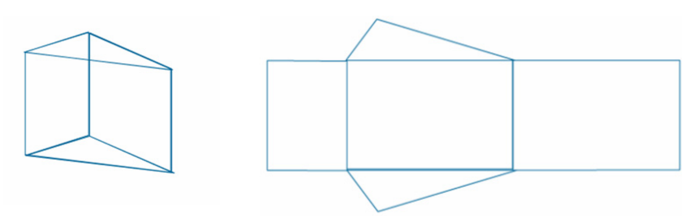
- de certains attributs mesurables;
- de repères associés aux divers attributs.

Exemple 1

On pourrait demander à l'élève du **cycle intermédiaire** de déterminer le coût du matériel de revêtement de la maison. Il ou elle doit d'abord visualiser la vue de côté en deux dimensions avant de pouvoir aborder ses calculs d'aire.

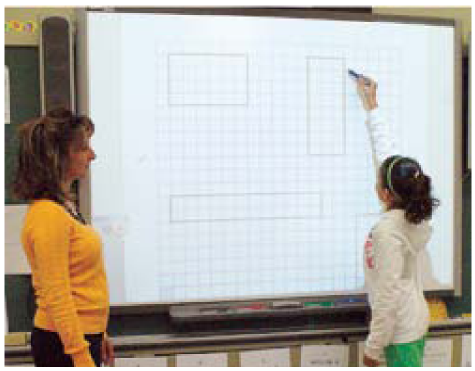
Exemple 2

On pourrait demander à l'élève de déterminer l'aire totale d'un prisme droit à base triangulaire à partir de sa figure en trois dimensions. L'élève doit pouvoir visualiser sa décomposition et calculer l'aire de chaque face qui la compose.



Plusieurs élèves éprouvent de la difficulté à visualiser les faces d'une image d'un objet en perspective. L'enseignant ou l'enseignante du **cycle intermédiaire** peut appuyer l'apprentissage de l'élève en lui offrant un choix varié de **matériels concrets** ou en lui donnant accès à **la technologie** appropriée**.** Pour ce faire, l'enseignant ou l'enseignante doit :

- choisir intentionnellement des stratégies d'enseignement et d'apprentissage qui se prêtent bien à l'utilisation du matériel concret et à la technologie;
- créer un milieu d'apprentissage propice au développement du sens de la mesure en permettant aux élèves d'avoir accès en tout temps au matériel d'exploration et de manipulation

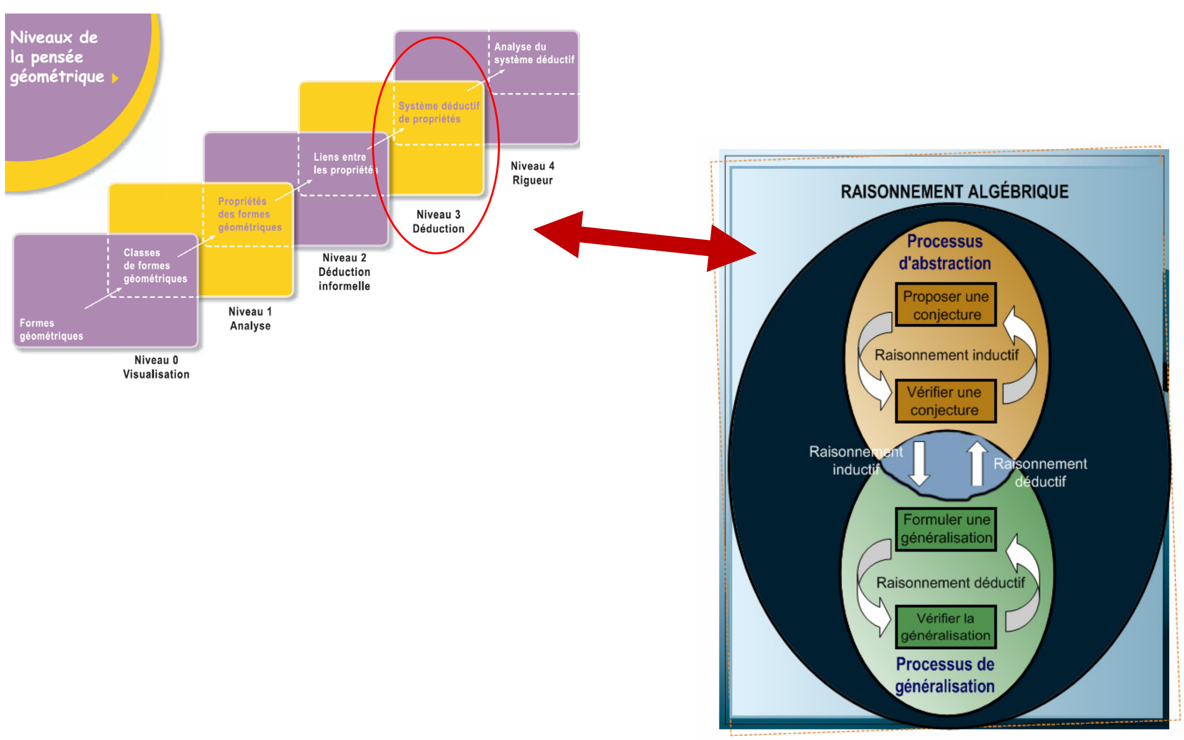


Habileté à raisonner

> *Raisonner c'est faire des inférences, généraliser et procéder à des validations. Les élèves font des inférences en déduisant l'information implicite de l'information donnée explicitement.*
>
> (Small, 2005, p. 77, traduction libre)

Raisonner constitue un processus mental selon lequel des idées s'enchaînent de façon logique. Il s'agit d'une habileté importante puisqu'elle permet à l'élève de structurer sa pensée en intégrant un ensemble de connaissances et en établissant des relations entre elles. L'habileté à raisonner dans un contexte de mesure et de géométrie permet à l'élève d'analyser les ressemblances et les différences entre les attributs mesurables, les figures planes et tridimensionnelles et les diverses transformations. Il ou elle peut ensuite tirer des conclusions, et ultimement, de réinvestir ces acquis dans un nouveau contexte ou dans une nouvelle situation. En lui demandant de justifier son raisonnement et d'expliquer sa démarche de résolution de problèmes, l'enseignant ou l'enseignante profite de sa curiosité intellectuelle pour l'amener à aller au-delà de la simple réponse et à réfléchir aux concepts fondamentaux propres à la géométrie et à la mesure. Pour ce faire, il importe que le milieu d'apprentissage soit propice aux échanges mathématiques et fasse en sorte que tout élève se sente à l'aise de formuler des conjectures et de les justifier.

La nature du raisonnement mathématique de l'élève est étroitement liée à sa capacité d'abstraction. Au **cycle intermédiaire**, l'élève développe son niveau de pensée géométrique pour atteindre le niveau de *déduction* (niveau 3). Il existe un lien avec le raisonnement algébrique, tel qu'illustré ci-dessous.

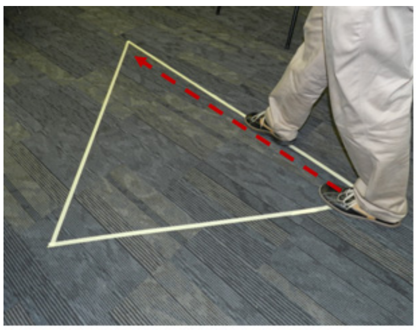


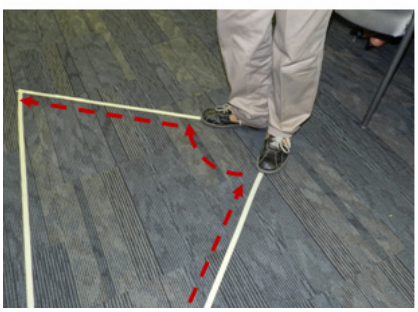
Voici deux exemples de démonstration portant sur la propriété des triangles qui veut que la somme des angles intérieurs d'un triangle soit toujours égale à 180°.

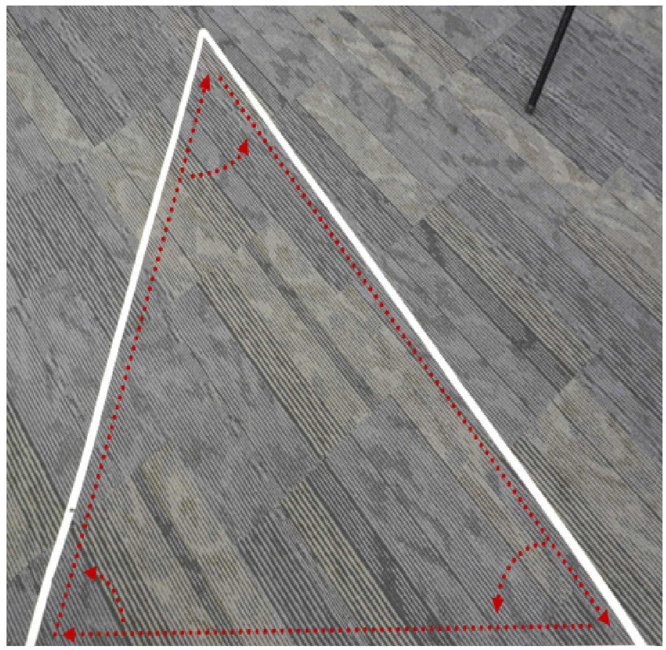
Exemple 1

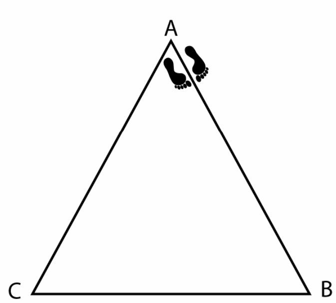
Lors de son apprentissage au **cycle moyen**, l'élève a su établir, de manière concrète, que la somme des angles intérieurs d'un triangle est toujours égale à 180°. Une façon de démontrer cette propriété, même au **cycle l'intermédiaire**, est de tracer un triangle quelconque sur le plancher avec du ruban gommé et demander à l'élève de marcher le long des trois côtés, en respectant les angles intérieurs.

L'élève marche le long d'un des trois côtés du triangle. Il ou elle continue à marcher en fermant les angles intérieurs des 3 sommets. À la fin du parcours, l'élève réalise qu'il ou elle se retrouve au point de départ et constate qu'il ou elle a fait une rotation de 180°.

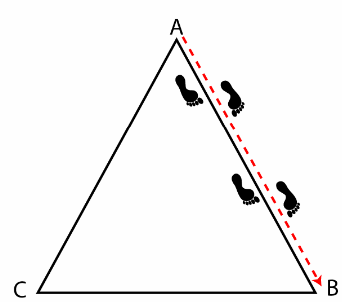




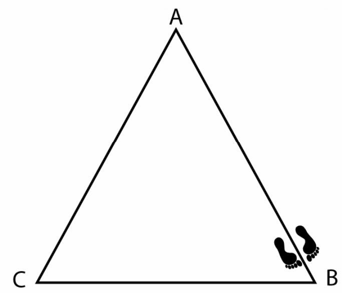




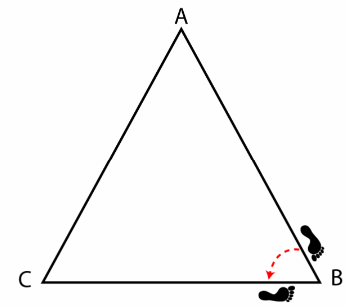
Étape 1 : L'élève se place au sommet A, il ou elle regarde vers l'avant.



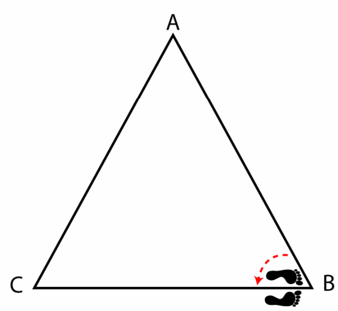
Étape 2 : L'élève se déplace jusqu'au sommet B en marchant vers l'avant, le long du coté AB.



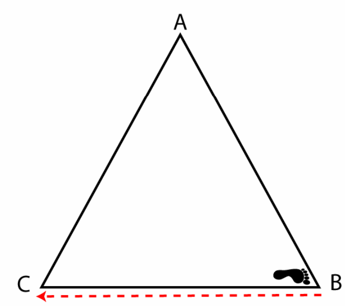
Étape 3 : L'élève s'arrête au sommet B.



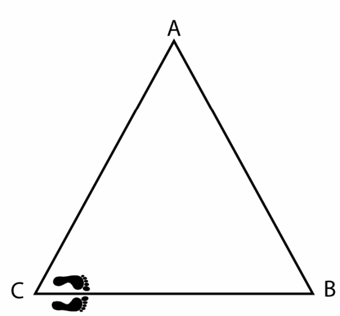
Étape 4 : L'élève bouge le pied afin de tracer l'angle intérieur du triangle.



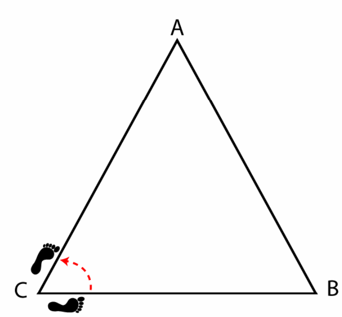
Étape 5 : L'autre pied suit.



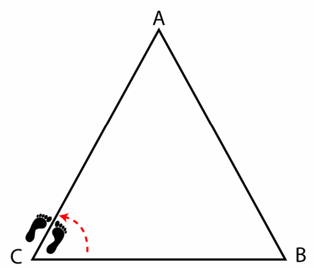
Étape 6 : L'élève se déplace en marchant à reculon le long du coté BC jusqu'au sommet C.



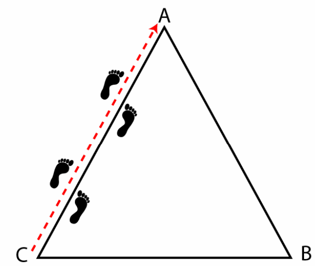
Étape 7 : L'élève s'arrête au sommet C.



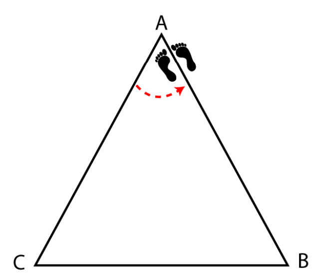
Étape 8 : L'élève bouge le pied afin de tracer l'angle intérieur du triangle.



Étape 9 : L'autre pied suit.

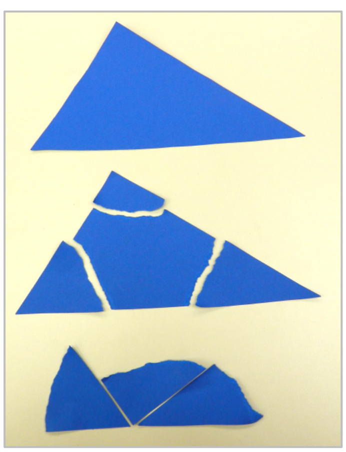


Étape 10 : L'élève se déplace en marchant vers l'avant jusqu'au sommet A et s'arrête.



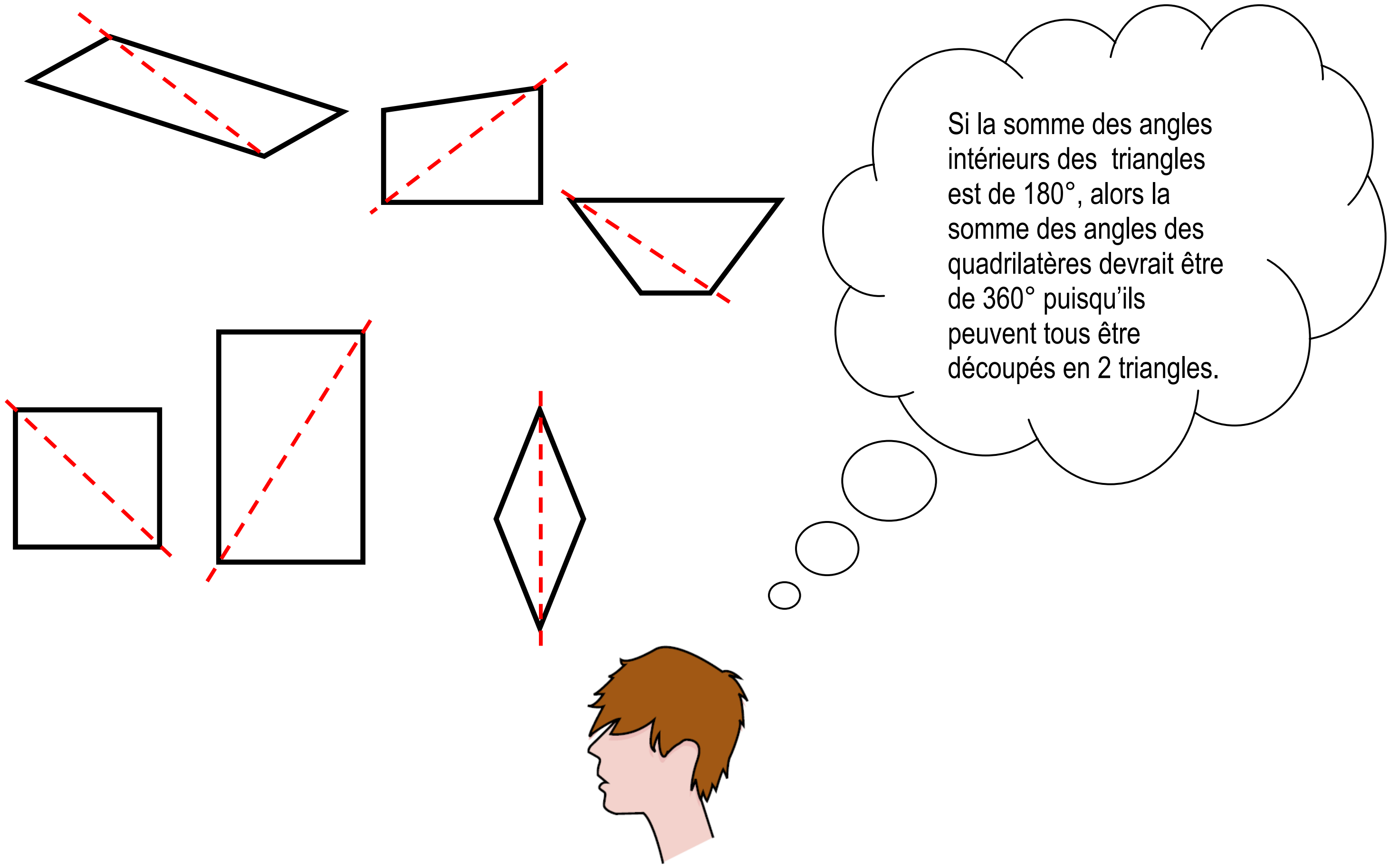
Étape 11 : L'élève bouge les pieds afin de tracer le troisième angle intérieur du triangle.
Il ou elle remarque qu'il est de retour au point initial mais que son corps fait face à la direction opposée du départ; il a fait un tour de 180°.

Exemple 2



Une autre façon de procéder est que l'enseignant ou l'enseignante aide l'élève à découvrir que la somme des angles intérieurs d'un triangle est toujours égale à 180° à l'aide de triangles en papier comme le montre l'image ci-contre. Dans cet exemple, l'élève déchire les coins d'un triangle et les place de façon à former un angle plat de 180°.

Ces deux approches permettent à l'élève d'établir ou de découvrir un lien entre le triangle et le quadrilatère, c'est-à-dire, que tout quadrilatère peut être décomposé en deux triangles. Il ou elle peut alors déduire que la somme des angles d'un quadrilatère est de 2 x 180°, soit 360°.



En 9e année, l'élève est amené à générer la formule générale pour déterminer la somme des angles intérieurs d'un polygone tout en faisant appel à ses connaissances et expériences antérieures. Une activité de ce genre est un exemple où l'élève doit faire un raisonnement déductif.

Suite à l'activité décrite ci-contre, l'enseignant ou l'enseignante observe le travail des élèves afin de vérifier si les élèves arrivent à une organisation logique des propriétés connues des angles intérieurs des polygones, c'est-à-dire faire un raisonnement déductif.

Consignes de l'activité :

1. En équipe de deux ou trois élèves, déterminez une relation qui permet de trouver la somme des angles à l'intérieur de n'importe quel polygone.

3. Vous pouvez utiliser le matériel concret, la technologie (par ex., tableau blanc interactif, logiciels de géométrie dynamique).

4. Laissez des traces claires et complètes de votre raisonnement sur un grand papier charte.

Pour l'élève qui éprouve des difficultés à démarrer son raisonnement, l'enseignant ou l'enseignante peut amorcer une réflexion en lui proposant une ou plusieurs questions d'échafaudage. À titre d'exemples, citons :

- « Comment sais-tu que la somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°? »
- « En quoi ce résultat peut-il être utile pour les quadrilatères? »

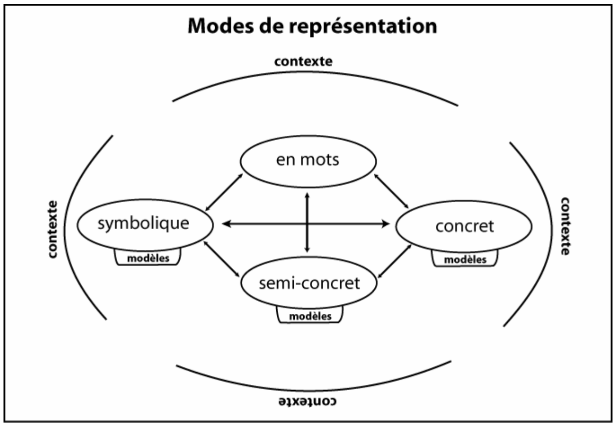
Un temps de consolidation est indispensable suite à une activité de découverte. L'échange mathématique est un cadre approprié et favorable pour faciliter cette consolidation. La section Communication du fascicule 1 du *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 7e à la 9e année* offre des informations plus détaillées relativement à l'organisation et à la présentation d'un échange mathématique.

Habileté à communiquer

> *La communication bénéficie à tous ceux qui participent à l'échange […]. L'obligation de faire part de sa compréhension d'une situation ou d'un concept contribue souvent à l'amélioration ou à l'approfondissement de cette compréhension.*
>
> (Ministère de l'Éducation du Québec, 2001, p. 132)

L'élève développe ses habiletés de communication lorsqu'il ou elle exprime sa compréhension d'une situation-problème ou d'un concept, et qu'il ou elle défend ses idées en utilisant différents **modes de représentation** :

- le mode **concret**, relié à l'exploration, à la manipulation et à la création à l'aide de matériel concret;
- le mode **semi-concret**, relié à une illustration, à un dessin, ou à toute autre représentation sur papier;
- le mode **symbolique**, relié à toute représentation faite à partir de chiffres et de symboles;
- le mode « **en mots** », relié à une explication ou à une description verbale ou écrite.



Afin d'acquérir une solide compréhension d'un concept quelconque, l'élève doit vivre des expériences en contexte en explorant des situations-problèmes. La mise en contexte permet à l'élève d'établir des liens entre les représentations et de développer une compréhension des concepts explorés en mesure et en géométrie. L'enseignant ou l'enseignante utilise aussi diverses représentations afin d'aider les élèves à s'approprier les concepts mathématiques et à établir des liens entre les représentations.

Après avoir développé une bonne compréhension des concepts mathématiques, l'élève doit être capable de partager sa compréhension en communiquant aux autres ce qu'il ou elle a compris. Pour ce faire, il ou elle peut utiliser plusieurs outils de communication en mathématiques, notamment l'argument mathématique décrit ci-après.

Argument mathématiques :
Justification orale ou écrite d' un raisonnement dans le but de démontrer ou de réfuter une idée mathématique.

L'**argument mathématique** est un outil essentiel de communication en mathématiques. Les élèves doivent parvenir à justifier leurs représentations, leurs idées et leur compréhension à l'aide d'arguments mathématiques, en se servant d'un vocabulaire de relations causales (p. ex., *si… donc, parce que, puisque*). Les arguments mathématiques permettent aux élèves de présenter leur compréhension de façon beaucoup plus juste et réfléchie. Pour plus de renseignements à ce sujet, consulter le document intitulé *Communication et apprentissage : Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques* (Radford et Demers, 2004, p.15-25).

Pour permettre à l'élève de maîtriser la terminologie et les conventions propres à la géométrie et la mesure, il importe à l'enseignant ou l'enseignante d'en faire usage de manière rigoureuse dans son cours. Une attention particulière à l'utilisation du vocabulaire juste et approprié est cruciale dans le cadre d'apprentissage. Il importe à l'enseignant ou l'enseignante du **cycle intermédiaire** de reconnaître que la terminologie employée à l'élémentaire ne coïncide pas toujours avec celle employée au niveau de la 9e et de la 10e année.

Un exemple fréquent de l'utilisation erronée de la terminologie est lorsqu'on traite de l'aire. Certaines personnes confondent les mots surface et aire qui ne sont pas pourtant des synonymes. Il est important de ne pas confondre surface, qui désigne un ensemble de points, et aire, qui désigne la mesure d'une surface. Un autre exemple est lorsqu'on parle de mesures d'angles. On ne mesure pas les angles des coins mais plutôt les mesures des angles des sommets.

Habileté à établir des liens

> *Les élèves doivent se rendre compte que « … les mathématiques sont beaucoup plus qu'un ensemble de notions théoriques et pratiques isolées. Les enseignantes et enseignants encouragent les élèves à découvrir de quelles façons les mathématiques sont reliées à leurs expériences quotidiennes afin de leur permettre d'en comprendre l'utilité et la pertinence, à l'école et ailleurs. »*
>
> (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a, p. 19)

L'élève du **cycle intermédiaire** peut établir certains liens entre différents domaines d'étude comme ceux de l'algèbre, de la numération et du sens du nombre, et de la géométrie analytique. Par exemple, lorsque l'élève examine le concept d'homothétie, il ou elle fait appel à ses connaissances acquises ou en voie de développement dans les domaines de mesure et de géométrie, ainsi que celui de la numération et du sens du nombre. Par ailleurs, lorsque l'élève effectue des problèmes de mesure de périmètre, d'aire ou de volume, il ou elle peut intégrer dans son travail le concept des rapports et des proportions ainsi que le calcul des coûts de matériaux de construction.

Afin de faciliter l'apprentissage des concepts en mesure, l'enseignant ou l'enseignante doit fournir aux élèves des occasions d'établir des liens entre ces concepts et :

- des expériences de la vie quotidienne;
- des concepts dans les autres domaines de mathématiques;
- des concepts dans les autres matières;
- différentes professions.

*(*Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010, p. 107)

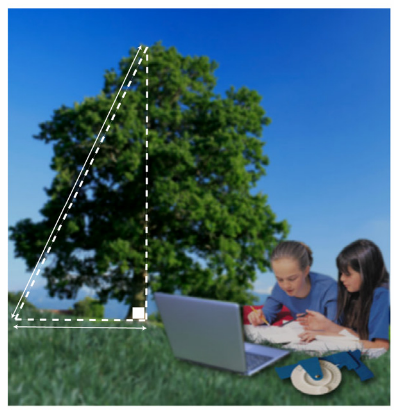
Les liens interdisciplinaires sont surtout très importants au **cycle intermédiaire** où dans beaucoup de cas les élèves commencent à vivre la rotation du secondaire avec des enseignants ou enseignants différents pour chaque matière. Des liens avec la science, la géographie, le français, etc. peuvent se révéler très utiles. On peut leur demander, par exemple, de déterminer les coordonnées d'une ville sur une carte géographique.

Il est trèes important de démontrer qu'il existe des liens entre le domaine de mesure et géométrie et la vie quotidienne sans oublier les carrières qui font appel à ce domaine. L'enseignant ou l'enseignante peut davantage encourager ces liens en intégrant des activités variées et complexes dans sa planification de l'enseignement et de l'apprentissage.

Habileté à utiliser la technologie

L'intégration efficace des technologies facilite l'engagement des élèves. Évidemment, il ne s'agit pas de la simple utilisation des ordinateurs comme engins de recherche et outils de rédaction. Il est surtout question de l'intégration progressive des nouvelles ressources technologiques comme la calculatrice, la calculatrice à capacité graphique, le tableau blanc interactif et les manettes afin de faire progresser le rendement des élèves et de permettre une meilleure compréhension de divers concepts. Ces ressources permettent aussi de développer les habiletés arithmétiques, les habiletés de résolution de problèmes et des habiletés intellectuelles de niveau supérieur. Selon Mayer et Moreno (2003, p. 23-44), l'apprentissage est facilité lorsqu'il y a une combinaison d'effets visuels, de textes et de sons. L'enseignant ou l'enseignante devrait faire constamment appel aux nouvelles technologies pour faciliter l'enseignement et l'apprentissage, car celles-ci occupent une part de plus en plus prépondérante dans la vie de tous les élèves.

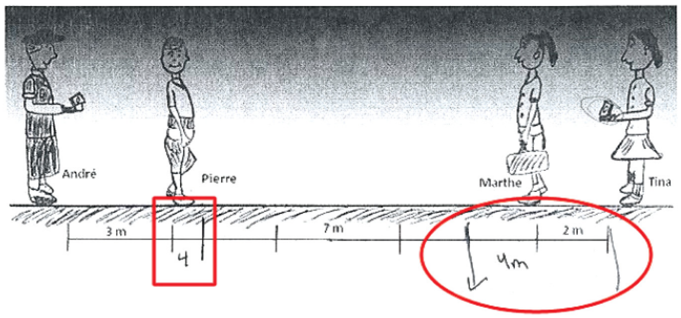
Au **palier élémentaire**, l'élève utilise le matériel de manipulation dans l'utilisation de repères afin de mesurer des attributs *longueur, aire, angle, etc.* Tout au début de sa scolarité, l'élève est mis en contact avec la technologie lorsqu'il ou elle est autorisée à utiliser la calculatrice comme soutien à son apprentissage. La calculatrice est donc un support technique qui permet, par exemple, à l'élève de 2e année d'effectuer l'addition répétée pour définir et prolonger une suite numérique. Au **cycle intermédiaire**, le matériel technologique peut aussi complémenter le matériel de manipulation pour renforcer l'expérience d'apprentissage des élèves.



L'utilisation par exemple du tableau blanc interactif offre à l'élève la possibilité d'utiliser des repères semi-concrets ou virtuels qu'il peut déplacer et comparer à un objet semi-concret représenté dans le tableau afin de mesurer un attribut de cet objet.

Au **cycle intermédiaire**, l'élève continue à utiliser le matériel concret pour découvrir expérimentalement des formules et développer encore plus son niveau d'abstraction. En plus du matériel concret, l'élève utilise des outils technologiques comme la calculatrice à capacité graphique, le tableur et des logiciels de géométrie dynamique qui offrent, par exemple, une alternative à l'approche classique rationnelle de l'établissement de la preuve en mathématiques. L'utilisation de certaines technologies peut permettre à l'élève d'explorer, de découvrir et de formuler des conjectures qui sont plus facilement vérifiables à l'aide de la technologie.

Une activité possible pour illustrer l'utilisation de la technologie en 9e année sur la compréhension du concept de l'origine du repère cartésien (0,0) permet d'illustrer le développement de l'abstraction des élèves. Dans cette simulation deux élèves se déplacent et se croisent. Deux élèves positionnés aux points de départ enregistrent les mouvements des deux déplacements. Le problème consiste à expliquer la position du point de rencontre physique et l'intersection des droites obtenues à l'aide des données des deux détecteurs de mouvements. (Radford et Demers, 2009, p. 78-80)



Récemment, l'utilisation des manettes s'est généralisée plus particulièrement au niveau du **cycle intermédiaire**. Les activités avec les manettes donnent à l'enseignant ou à l'enseignante une excellente opportunité pour faire un diagnostic rapide et fournir une rétroaction facilitant la consolidation immédiate de l'apprentissage. Les activités avec les manettes peuvent aider à préparer les élèves pour les questions à choix multiples qui sont utilisées, par exemple, dans des évaluations provinciales ou celles du baccalauréat international.

Photo : http://advanced-education.com/educators/products/student-response-system/

En plus de la technologie comme support de l'enseignement, les écoles développent de plus en plus des sites Web qui donnent un accès à l'élève et constituent une plateforme virtuelle permettant de réunir l'enseignant ou l'enseignante et l'élève. Cette plateforme facilite et maintient le contact entre ceux-ci tout en permettant l'apprentissage en dehors des heures de classe.

En résumé, le matériel concret est utilisé au palier **élémentaire** et au **cycle intermédiaire** pour aider l'élève dans la phase de développement de son niveau d'abstraction. De même, la technologie sous ses différentes formes, est utilisée à partir de l'élémentaire et se développe beaucoup plus aux niveaux **intermédiaire** et **supérieur**. Comme support de l'apprentissage, la technologie favorise la différentiation pédagogique pour répondre aux besoins spécifiques de tous apprenants et apprenantes et constitue un excellent support aux différents styles d'apprentissage. Elle aide ainsi l'élève à travailler selon son propre rythme, lui permettant de revenir sur la matière abordée en classe et ainsi gérer son temps à sa convenance.

RÔLE DE L'ENSEIGNANT OU DE L'ENSEIGNANTE

Le rôle de l'enseignant ou l'enseignante s'articule autour de trois axes : créer un milieu d'apprentissage convivial, proposer des activités pertinentes et faire de l'aménagement linguistique en français une priorité.

Créer un milieu d'apprentissage convivial

L'attitude des élèves face aux mathématiques influe sur leur façon d'aborder la résolution de problèmes et détermine leur degré de réussite en mathématiques. L'enseignant ou l'enseignante peut développer chez l'élève un plus grand niveau de confiance en mathématiques en élaborant une gamme de stratégies d'enseignement et d'évaluation fondées sur une pédagogie éprouvée. Il lui faut concevoir des stratégies qui tiennent compte des différents styles d'apprentissage et les adapter pour répondre aux divers besoins de ses élèves. Les stratégies utilisées devraient aussi viser à insuffler à chaque élève le désir d'apprendre et l'inciter à donner son plein rendement. Enfin, l'enseignante ou l'enseignant exerce une influence déterminante en favorisant chez les élèves l'adoption d'une attitude positive à l'égard des mathématiques, ce qui contribue à les démystifier et à réduire la phobie qu'elles inspirent chez certains élèves. À cet égard, le Groupe d'experts pour la réussite des élèves fait état dans son rapport intitulé *La numératie en tête* (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2004, p. 39) de cinq mythes qui, d'après Arthur Costa, renforcent l'idée que les mathématiques sont la matière la plus difficile du curriculum et dont il faut se défaire. Deux de ces mythes résument bien le changement à effectuer en mathématiques pour favoriser l'établissement d'un climat propice en salle de classe :

- Il n'y a qu'une seule façon de résoudre un problème mathématique; suivre une procédure et appliquer des formules prescrites pour arriver à la bonne réponse.
- L'enseignante ou l'enseignant et le manuel sont infaillibles; on ne les remet jamais en question.

Selon Costa, l'utilisation de stratégies variées de résolution de problèmes stimule la curiosité intellectuelle des élèves en les encourageant à poser des questions, à comparer leur pensée à celle des autres, à explorer différentes façons de résoudre le problème et à persister dans leur démarche. De plus, il faut mettre l'accent sur les processus mathématiques et les liens entre les concepts et les structures mathématiques. De cette façon, l'enseignant ou l'enseignante accroît la portée de ses stratégies d'intervention visant à permettre aux élèves de développer une meilleure compréhension des mathématiques.

Proposer des activités pertinentes

De par leur conception, les cours de 9e année constituent le prolongement du programme de mathématiques de 7e et 8e année pour permettre une transition sans heurt de l'élémentaire au secondaire. La philosophie est la même : donner à l'élève la possibilité de découvrir les mathématiques par le biais d'expériences concrètes avant de l'initier aux concepts plus abstraits. Aussi incombe-t-il à l'enseignant ou l'enseignante de concevoir des activités qui se fondent sur un apprentissage actif et de faire constamment des liens entre la théorie et la pratique. En misant sur le connu et le concret, il ou elle amènera les élèves à découvrir et à intégrer les concepts à l'étude par la vérification d'hypothèses, la manipulation de matériel ou l'utilisation d'outils technologiques, la discussion et la réflexion sur le travail effectué. En situant l'activité dans un contexte connu, les élèves peuvent en voir clairement la pertinence et l'application dans le monde qui les entoure.

Faire de l'aménagement linguistique en français une priorité

La qualité de la langue utilisée est garante de la qualité des apprentissages. Il importe donc qu'en salle de classe on accorde la plus grande importance à la qualité de la communication orale et écrite, quelle que soit l'activité d'apprentissage. Il ne s'agit pas toutefois de tout corriger, mais plutôt d'encadrer l'élève dans le processus de production orale et écrite pour l'amener progressivement à communiquer clairement ses idées. Il faut offrir à l'élève un milieu linguistique cohérent, où tout contribue à enrichir ses compétences en français. Il est donc essentiel que l'élève dispose de diverses ressources d'apprentissage en français.

En mesure et en géométrie, l'enseignant ou l'enseignante doit encourager les élèves à dépasser l'application des procédures et l'emploi d'instruments de mesure afin qu'ils puissent développer une bonne compréhension conceptuelle des attributs en mesure et des unités conventionnelles correspondantes. Il ou elle doit aussi les inciter à établir des liens entre les concepts, les procédures et les relations en mesure.

Pour ce faire, l'enseignant ou l'enseignante :

- choisit des stratégies d'enseignement et d'apprentissage efficaces;
- choisit stratégiquement les pistes de questionnement;
- planifie et structure l'échange mathématique à travers des leçons à trois temps;
- crée un milieu d'apprentissage qui intègre le matériel de manipulation et les outils technologiques.

RÉFÉRENCES

Hodgson, Ted, Linda Simonsen, Jennifer Luebeck et Lyle Andersen. 2003. « Measuring Montana: An Episode in Estimation », dans Douglas H. Clements et George Bright (dir.), *Learning and Teaching Measurement: 2003 Yearbook*, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 226.

Joram, Elana. 2003. « Benchmarks as Tools for Developing Measurement Sense », dans Douglas H. Clements et George Bright (dir.), *Learning and Teaching Measurement: 2003 Yearbook*, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 58-59 et 66.

Mamolo A., Sinclair M. et Whiteley W. 2011. Proportional Reasoning with a Pyramid, NCTM, Volume 16, Issue 9

Mayer, R.E. et R. Moreno. 2003. Nine Ways to Reduce Cognitive Load in Multimedia Leaning. dans C.A. Horn, & L. M. PytlikZillig (Eds.), Web-based Learning: What do We Know? Where do we go? Greenwich, (USA), Information Age Publishing, p. 23-44.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2010. Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la 4e à la 6e année, Mesure, Toronto, le Ministère, pp. 8, 17, 18-19, 20, 39-43, 60, 82 et 107.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2009. Le passage de l'abstrait dans l'apprentissage des mathématiques au cycle intermédiaire (de la 7e à la 10e année), Monographie no, 6, p. 2.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2006. Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la 4e à la 6e année, Géométrie et sens de l'espace, Fascicule 1, Toronto, le Ministère, pp. 13-14.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2005a. Le curriculum de l'Ontario de la 1re à la 8e année – Mathématiques, Révisé, Toronto, le Ministère, p. 5, 6, 9, 17, 18, 61 et 96.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2005b. *Le curriculum de l'Ontario de la 9e et 10e année – Mathématiques, Révisé,* Toronto, le Ministère, p. 5, 6, 9, 11, 35, et 61.

ONTARIO, MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2004. Groupe d'experts pour la réussite des élèves, La numératie en tête, Toronto, le Ministère, p. 39.

Outhred, L., Michelmore, M., McPhail D. et Gould P. 2003. « Count Me into Measurement: A Program for the Early Elementary School », dans Douglas H. CLEMENTS et George BRIGHT (dir.), Learning and Teaching Measurement: 2003 Yearbook, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 81.

QUÉBEC. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2001. Programme de formation de l'école québécoise : Éducation préscolaire, Enseignement primaire, Québec, le Ministère, p. 132.

Radford, L. et S. Demers. 2004. Communication et apprentissage : Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques. Ottawa, ON, Canada : Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, p. 15-25.

Radford, L. et S. Demers. 2009. Processus d'abstraction en mathématiques, Université Laurentienne, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario, pp. 78-80.

Small, Marian. 2005. Patterns and Algebra: Background and Strategies, coll. “Prime”, Toronto/Nelson, p. 77.

Small, Marian, et Amy Lin. 2010. More Good Questions: Great Ways to Differentiate Secondary Mathematics Instruction, New York, Teachers College Press, p. 89-90, 94 et 215.

Sousa, David A., 2010. Un cerveau pour apprendre les mathématiques, Montréal (Québec), Chenelière éducation, p.103.

Van De Walle, John A., et LouAnn H. Lovin. 2008a. *L'enseignement des mathématiques : L'élève au centre de son apprentissage,* Tome 2, éd. française, Saint-Laurent (Québec), Éditions du Renouveau Pédagogique, p. 296-297.

Van De Walle, John A., et LouAnn H. Lovin. 2008b. *L'enseignement des mathématiques : L'élève au centre de son apprentissage,* Tome 3, éd. française, Saint-Laurent (Québec), Éditions du Renouveau Pédagogique, pp. 14, 191, 210, 217, 234, 236, 238 et 254.

Van de Walle, John A., et Sandra Folk. 2005. Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally, éd. canadienne, Toronto, Pearson Education Canada, p. 329